Tag 07

Themen

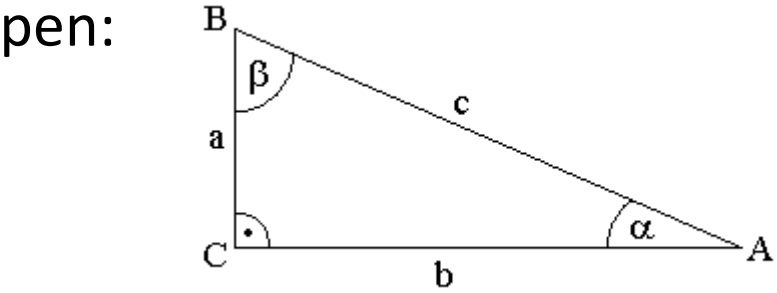
- Logik und Mengenlehre
- Zahlensysteme und Arithmetik
- Gleichungen und Ungleichungen
- Lin. Gleichungssysteme und spez. Anwendungen
- Geometrie und Trigonometrie
- Vektoren in der Ebene und Punktemengen
- Funktionen einer Veränderlichen
- Zahlenfolgen und Konvergenz
- Differenzialrechnung
- Integralrechnung

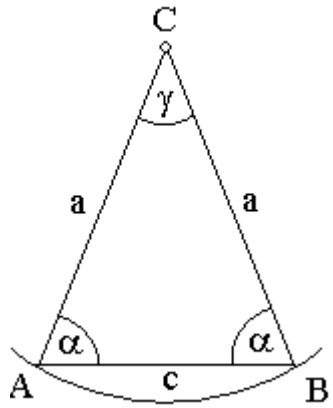
Elementare Geometrie

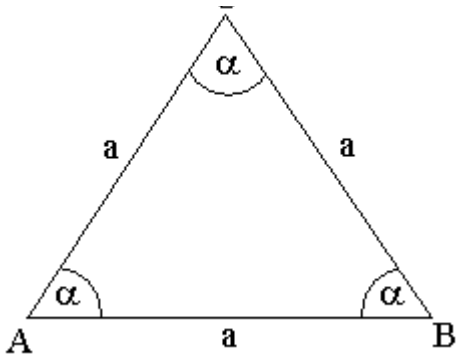
Figuren der ebenen Geometrie:

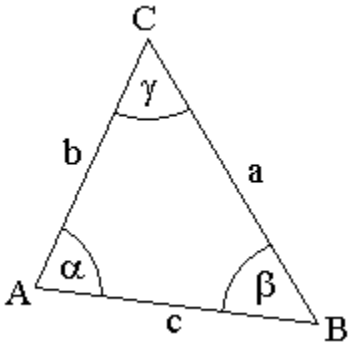
Dreieck: Drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, lassen sich immer durch Strecken zu einem Dreieck verbinden.

Dreiecktypen:





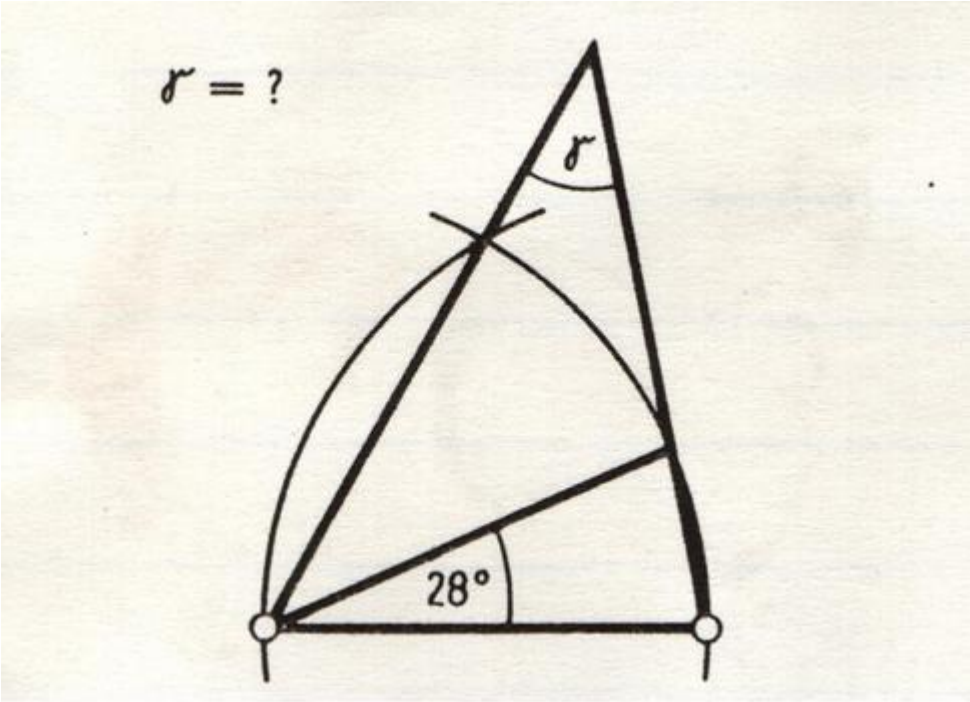




Bem.: $\alpha+\beta+\gamma=180°$

Übung: Elementare Geometrie

Bestimmen Sie die Größe des Winkels γ.



Die gegebene Skizze ist nicht maßstabsgetreu.)

Kongruenz und Ähnlichkeit

Def.: Abbildungen (in) einer Ebene

Eine Abbildung f einer Ebene ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Punkt P der Ebene genau einen Punkt $f(P)$, den Bildpunkt, derselben Ebene zuordnet.

z.B.:

a) **Drehung** (Rotation) um einen Punkt Z (das Drehzentrum) um den Winkel α (den Drehwinkel)

b) **Spiegelung** (Reflexion) eines Punktes P an einer Geraden g

c) **Verschiebung** (Translation) eines Punktes P um die Distanz $\overline{AB}$ in die Richtung $\overrightarrow{AB}$ (Verschiebevektor)

d) **Streckung** (Elongation) Veränderung der Distanz $\overline{ZP}$ des Punktes P vom Punkt Z (Streckzentrum) um das Vielfache $m > 0$ (Streckfaktor) in Richtung von $\overrightarrow{ZP}$.

Kongruenz und Ähnlichkeit

Def.: Kongruenzabbildung

Eine Abbildung der Ebene in sich heißt Kongruenzabbildung oder **Bewegung**, wenn Sie Abstände einhält.

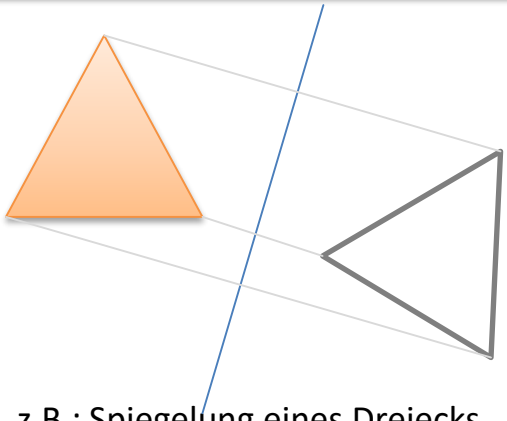
(a), b), c) sind Kongruenzabbildungen)

Für jede Bewegung gilt

1. Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
2. Winkel zwischen Geraden bleiben erhalten.

Def.: Kongruent

Zwei Figuren der Ebene heißen kongruent (deckungsgleich), wenn es eine Bewegung gibt, die sie aufeinander Abbildet.



z.B.: Spiegelung eines Dreiecks

Kongruenz und Ähnlichkeit

Satz:

Sei F die Menge aller Punkte einer Figur. Gilt nun für eine Abbildung f in der Ebene

$$d(Q;P) = d\big(f(Q);f(P)\big) \quad \forall\, Q,P \in F,$$

wobei $d\colon F \times F \to \mathbb{R}$ den Abstand zweier Punkte aus F bezeichne, so ist f eine Kongruenzabbildung.

Kongruenzsätze für Dreiecke:

Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie

(a) in drei Seiten übereinstimmen.
(b) in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen.
(c) in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
(d) in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Kongruenz und Ähnlichkeit

Def.: Ähnlichkeit

Eine Abbildung f der Ebene heißt Ähnlichkeit oder Ähnlichkeitsabbildung, wenn es eine Konstante $k > 0$ gibt, so dass für je zwei Punkte P und Q der Ebene gilt:

$$d\big(f(Q); f(P)\big) = k \cdot d(Q; P)$$

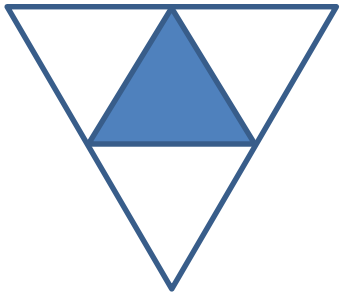
Unter Ähnlichkeiten bleiben Geraden und Winkel unverändert. Abstände können sich dagegen ändern.

Satz:

Jede Ähnlichkeit ist als Kombination einer Bewegung und einer Streckung darstellbar.

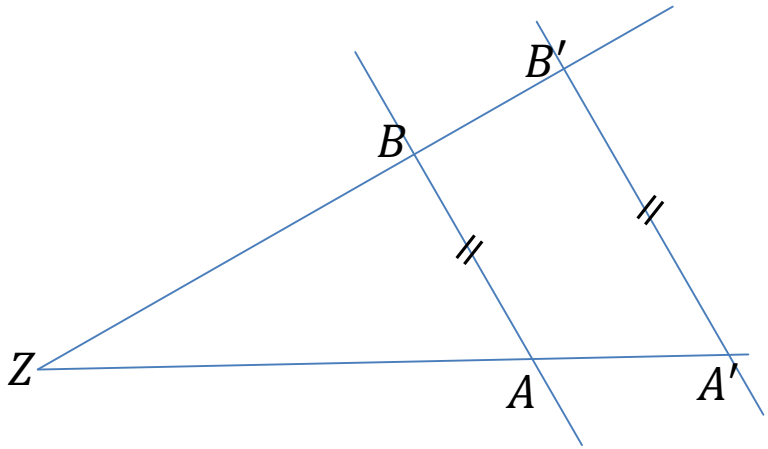
Def:

Figuren nennt man **ähnlich**, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung zwischen ihnen gibt.



z.B.: Drehung und Streckung eines Dreiecks

Der Strahlensatz:



Es liegt eine Streckung vor, mit dem Streckzentrum Z

$\Rightarrow$ Δ_{ABZ} ist ähnlich zu $\Delta_{A'B'Z}$

$\Rightarrow$ $\exists\, m > 0$, s.d.

$$m \cdot d(Z;A) = d(Z;A')$$

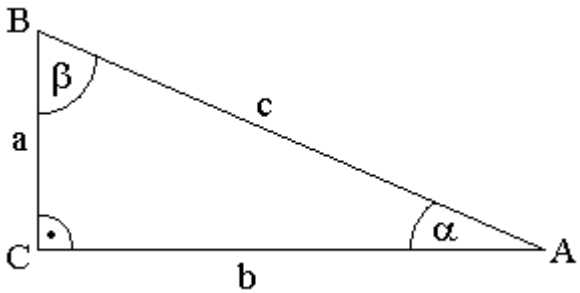
$$m \cdot d(Z;B) = d(Z;B')$$

$$m \cdot d(A;B) = d(A';B')$$

$$m = \frac{d(Z;A')}{d(Z;A)} = \frac{d(Z;B')}{d(Z;B)} = \frac{d(A';B')}{d(A;B)}$$

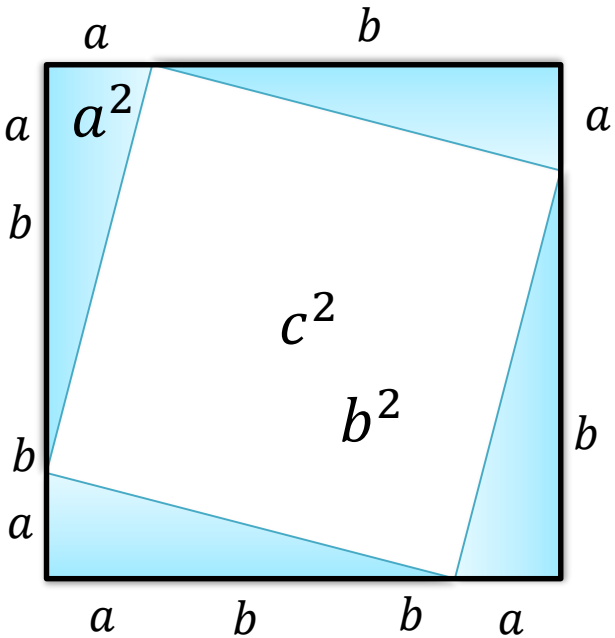
Der Satz des Pythagoras:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Quadrat der Hypothenuse.



$$\Updownarrow$$

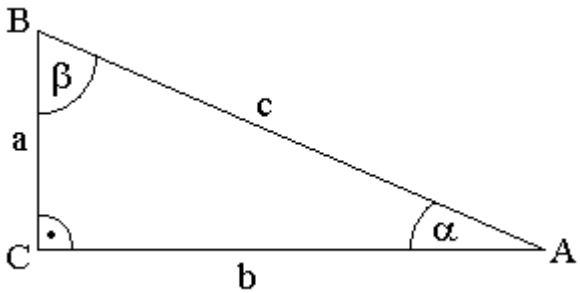
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Seitenbezeichnungen:
a, b: Katheten; c: Hypotenuse

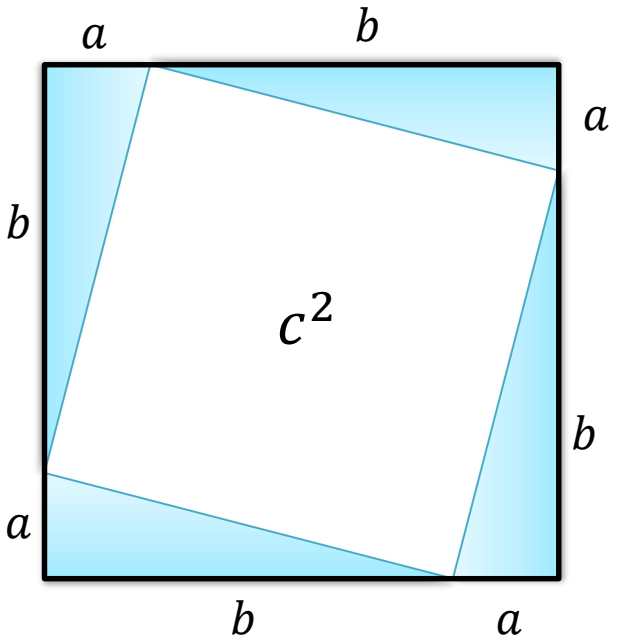
Der Satz des Pythagoras:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Quadrat der Hypothenuse.



$$\Updownarrow$$

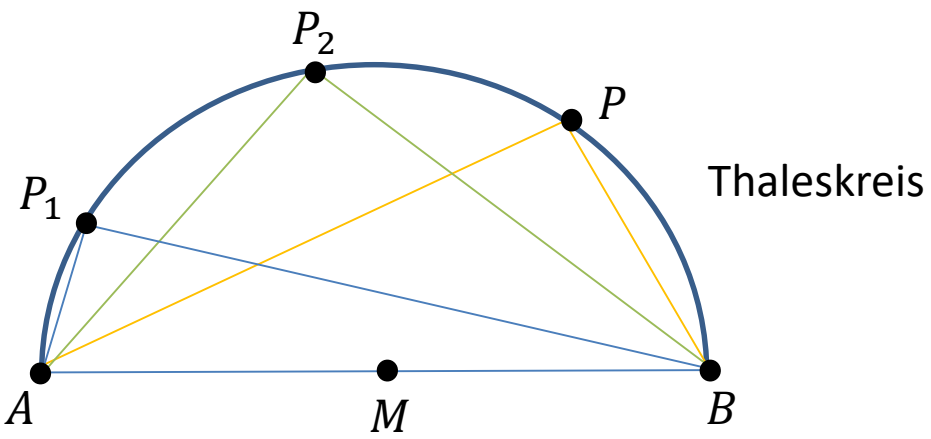
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Seitenbezeichnungen:
a, b: Katheten; c: Hypotenuse

Der Satz des Thales:

Gegeben sei die Strecke $[AB]$ mit dem Mittelpunkt M. Zeichne man um M einen Kreis mit dem Radius $r = \overline{MA}$ (den Thaleskreis) und ist P ein beliebiger Punkt auf dem Kreisbogen, so ist der Winkel zwischen $[PA]$ und $[PB]$ ein rechter.

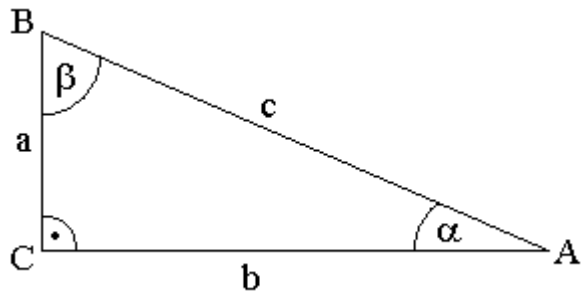


Satz von Thales (Kurzfassung):

Der Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter.

Winkelfunktionen

Das rechtwinklige Dreieck



Seitenbeziehung: Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Seitenbezeichnungen:

a, b: Katheten; c: Hypotenuse

Seitenverhältnisse (trigonometrische Funktionen/Winkelfunktionen):

$$\frac{a}{c} = \sin(\alpha) \quad \frac{b}{c} = \cos(\alpha) \quad \frac{a}{b} = \tan(\alpha) \quad \frac{b}{a} = \cot(\alpha) \quad \frac{c}{b} = \sec(\alpha) \quad \frac{c}{a} = \csc(\alpha)$$

Die Bezeichnungen sin, cos, tan, cot, sec und csc, stehen als Abkürzungen für sogenannte **transzendente Funktionen**, deren Terme nicht durch endliche Verknüpfungen von Polynomen darstellbar sind.

Trigonometrische Funktionen

Für die analytische Geometrie sind die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen und deren Eigenschaften fundamental.

Direkte Beziehungen:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \qquad 1 = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$$

Symmetrieeigenschaften:

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha); \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Winkelmaße

Das Argument der Winkelfunktionen

(Die Werte des Arguments der Winkelfunktionen sind einheitenfrei!)

- **Im Winkelmaß** entspricht ein voller Umlauf einem Winkel von 360°.

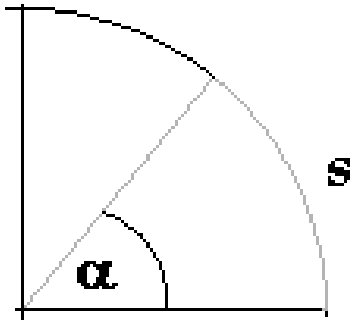
  (Festlegung wegen der Teilbarkeit von 360°)

- **Im Bogenmaß** entspricht ein voller Umlauf der Länge des Umfang des Einheitskreises (Kreis mit Radius 1), nämlich dem Wert 2π.

$$(r = 1, U_{\text{Kreis}} = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \Rightarrow \quad U_{\text{Einheitskreis}} = 2 \cdot \pi)$$

Zusammenhang Winkel- und Bogenmaß

Die Umrechnung vom Winkelmaß ins Bogenmaß (u.u.) erfolgt über <u>das direkt proportionale Verhältnis</u> beider Winkelmaße zueinander.



(***s***: Bogenlänge)

$$\begin{array}{c} 2\cdot\pi \cong 360^\circ \\ s \cong \alpha \end{array} \Rightarrow \frac{2\cdot\pi}{360^\circ} = \frac{s}{\alpha}$$

Winkelmaße

Umrechnungen Winkel- und Bogenmaß

- Winkelmaß ins Bogenmaß:
  (α : gegeben)

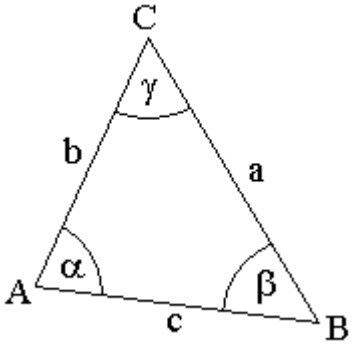
$$s = \frac{2 \cdot \pi}{360°} \cdot \alpha$$

- Bogenmaß ins Winkelmaß:
  (s : gegeben)

$$\alpha = \frac{360°}{2 \cdot \pi} \cdot s$$

Geometrische Sätze

Der Sinussatz:



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Der Kosinussatz:

(eine Erweiterung des Satzes von Pythagoras)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Die Additionstheoreme und Produktsätze der Winkelfunktionen

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

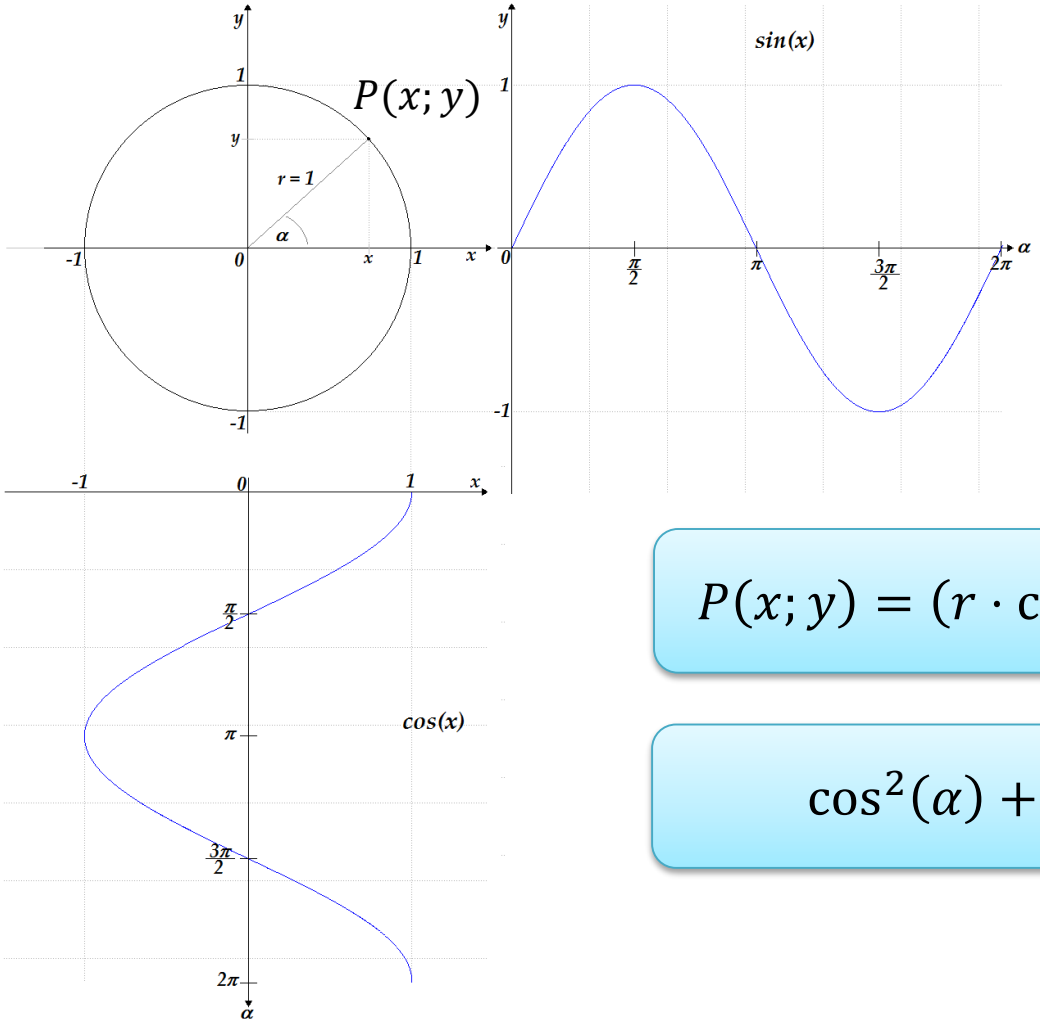
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Trigonometrische Funktionen



Projektion der Kreisbewegung auf die Achsen.

$$P(x;y) = (r \cdot \cos(\alpha)\,; r \cdot \sin(\alpha))$$

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$