Tag 06

Münchner Volkshochschule

Themen

- Logik und Mengenlehre
- Zahlensysteme und Arithmetik
- Gleichungen und Ungleichungen
- Lin. Gleichungssysteme und spez. Anwendungen
- Geometrie und Trigonometrie
- Vektoren in der Ebene und Punktemengen
- Funktionen einer Veränderlichen
- Zahlenfolgen und Konvergenz
- Differenzialrechnung
- Integralrechnung

Lineare Gleichungssysteme VI

Lösungsverfahren: Das Gaußverfahren

$$I:\ 2x - y = 3$$

$$II:\ x - y = -2$$

1) Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Koeffizientenmatrix

Die erweiterte Koeffizientenmatrix

Lineare Gleichungssysteme VII

Lösungsverfahren: Das Gaußverfahren I

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

2) Gelöst wird wie beim Additionsverfahren, wobei Nicht-Zielzeilen unverändert bleiben.

- Multiplikation der ersten Zeile mit -½
- Addition zur zweiten Zeile

$$\begin{array}{r} \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \\ + \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Lineare Gleichungssysteme VIII

Lösungsverfahren: Das Gaußverfahren II

$$\begin{array}{rl} \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot & \\ + & \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \left(-\frac{1}{2}\right): \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right)$$

3) Die zweite Zeile durch - ½ dividieren:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Die Koeffizientenmatrix besitzt Dreiecksform
Das LGS ist jetzt lösbar.

Münchner Volkshochschule

Lineare Gleichungssysteme IX

Lösungsverfahren: Das Gaußverfahren II

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

4) Lösen durch rückwertiges Einsetzen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Übung 26: Gaußverfahren

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe des Gaußverfahrens:

$$a)\ \ 2x-3y=4\,;\ \ x-5y=11$$

$$b)\ \ 2x-3y=4\,;\ \ 4x-6y=6$$

$$c)\ \ 2x-6y=12\,;\ \ 3y-x=-6$$

Achten Sie auf die ausführliche Dokumentation Ihrer Rechnung.

Wie lautet jeweils die Lösungsmenge?

Lineare Gleichungssysteme X

Lösungsmengen beim Gaußverfahren

1) Genau eine Lösung:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \qquad \mathbb{L} = \{ x = 5 \wedge y = 7 \}$$

2) Unendlich viele Lösungen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \mathbb{L} = \{ (x; y) \mid y = 2x - 3 \}$$

1) Keine Lösung:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \qquad \mathbb{L} = \{ \ \}$$

Münchner Volkshochschule

Lineare Gleichungssysteme XI

Lösungsverfahren: Das Gaußverfahren bei mehr als drei Variablen

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Der Reihe nach werden die folgenden Koeffizienten eliminiert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ \boxed{a_{21}}\ 2. & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ \boxed{a_{31}}\ 1. & \boxed{a_{32}}\ 3. & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Anschließend wird das LGS durch rückwertiges Einsetzen gelöst.

Übung 27: Gaußverfahren I

Lösen Sie die folgende Aufgabe mit Hilfe des Gaußverfahrens:

Das Problem der 100 Vögel

Chang Ch'iu-chien Suan Ching :

„Arithmetisches Handbuch des Chang Ch'iu-chen"

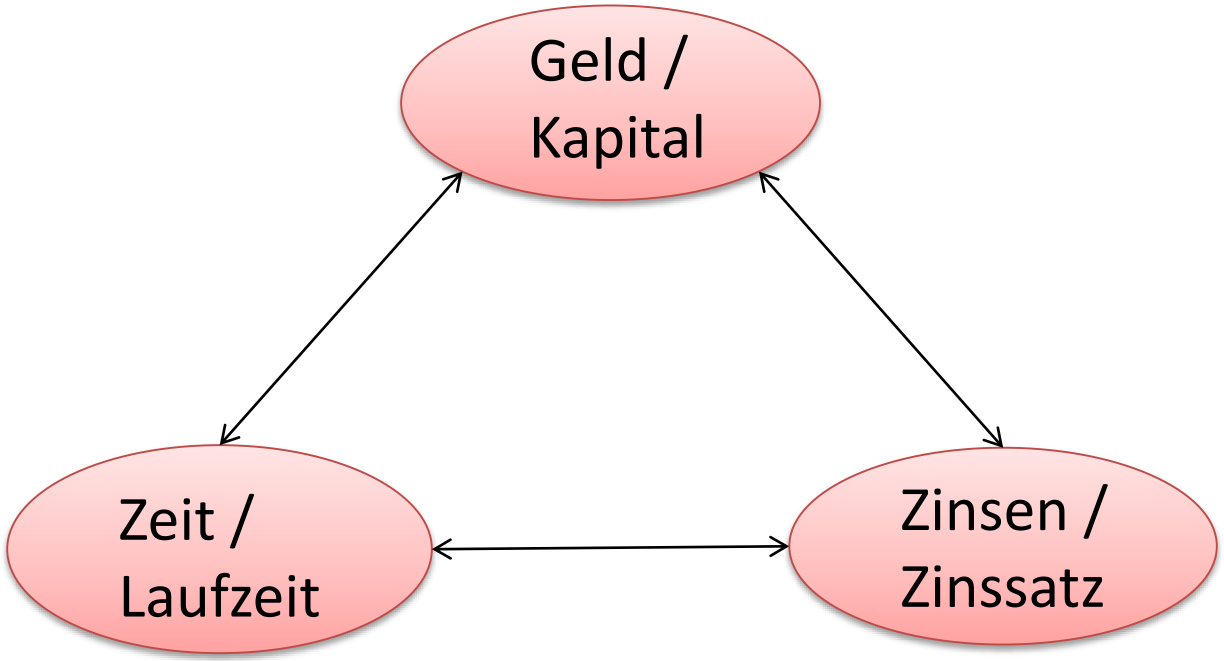
(ca. 475 n.Chr.)

Ein Hahn kostet 5 Sapeks, eine Henne kostet 3 Sapeks und 3 Küken 1 Sapek. Wenn wir nun für 100 Sapeks 100 dieser Tiere einkaufen, wie viele sind es dann von jeder Sorte?

Achten Sie wie üblich auf die ausführliche Dokumentation Ihrer Rechnung.

Ein wenig Finanzmathematik

Die drei Säulen der Finanzmathematik



Geld / Kapital:	Form von Zahlungen
Zeit / Laufzeit:	Zeitpunkt der Zahlungen; Zeitraum zwischen Zahlungen
Zinsen / Zinssatz:	Überlassungsvereinbarung für Geld / Kapital

Ein wenig Finanzmathematik

Prozent: $1\% := \frac{1}{100} = 0{,}01$

Bezeichnungen: $p\% := \frac{p}{100} =: i$

p = Prozent**fuß**

i = Prozent**satz**

Grundgleichung der Prozentrechnung

$$\boxed{Z = K \cdot i}$$

K : Grundwert, Grundgröße, Basiswert, Basisgröße, Bezugswert

Z : Prozentwert (**absoluter** Anteil bzgl. des Grundwertes)

Ein wenig Finanzmathematik

Begriffe:

- **Kapital** (K), gemessen in GE (Geldeinheiten) wird über einen Zeitraum t (**Laufzeit**) ausgeliehen.

- **Zinsen** (Z) sind die Vergütung des überlassenen Kapitals in einer festgelegten Zeit (Zinsperiode).

- **Zinszuschlagtermin** ist der Zeitpunkt, wenn die Zinsen fällig werden.

- **Zinsperiode** ist der Zeitraum zwischen zwei aufeinander folgenden Zinszuschlagsterminen (üblich ist ein Kalenderjahr).

Ein wenig Finanzmathematik

Begriffe:

- **Zinsarten:**
  - Guthabenzinsen: Habenzinsen
  - Darlehenszinsen: Sollzinsen

- **Zinszahlungsarten:**
  - Nachschüssig: Fälligkeit am Ende der Zinsperiode (Regelfall)
    (dekursive) Verzinsung
  - Vorschüssig: Zinsen werden vereinbart; Fälligkeit zu Beginn der Zinsperiode
    (antizipative) Verzinsung

Ein wenig Finanzmathematik

Verzinsungsmodelle:

1. **Linearer (einfacher) Zins**: die Zinsen werden zeitanteilig berechnet und **erst am Ende** der Laufzeit dem Kapital zugeschlagen bzw. mit dem Kapital verrechnet. Innerhalb der Laufzeit gibt es keine Zinszuschlagstermine.
2. **Exponentielle Zinsen** oder **Zinseszinsen**: Die Zinsen werden nach jeder Zinsperiode dem Kapital zugeschlagen und tragen von da an selbst wieder Zinsen. Innerhalb der Laufzeit liegen **ein oder mehrere Zinszuschlagstermine**.
3. **Gemischte Verzinsung**: Kombination aus einfachen Zinsen und Zinseszinsen

Münchner Volkshochschule

Ein wenig Finanzmathematik

Zinseszinsrechnung

K_0	Barwert: Anfangskapital
n	Anzahl der vollständigen Zinsperioden (i.Allg. Jahre)
p	Zinsfuß
i	Zinsrate (in %), Zinssatz, Verzinsung, Rendite
$q^{[n]}$	Aufzinsfaktor [für n Zinsperioden]
K_n	Endwert: Kapital am Ende der n-ten Zinsperiode

Leibnizsche Zinseszinsformel:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n$$

($q \coloneqq 1 + i$:„Aufzinsfaktor“)

Ein wenig Finanzmathematik

Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n$$

$$Z_n = K_n - K_0 = K_0 \cdot \left(q^n - 1\right)$$

Von p, i (oder q) und n, K_0, K_n (oder Z_n) müssen jeweils 3 Werte gegeben sein.

1. Endkapital berechnen
2. Anfangskapital berechnen
3. Zinssatz, Zinsfuß, Zinsrate oder Zinsfaktor berechnen
4. Laufzeit berechnen

Ein wenig Finanzmathematik

Grundaufgaben zur Zinseszinsrechnung

a) Wie hoch ist das Endkapital bei einem Anfangskapital von 250.000€ bei einer jährlichen Verzinsung von 5% in 7 Jahren?

b) Wie hoch muss das Anfangskapital sein, damit man bei 5% Verzinsung nach 8 Jahren ein Endkapital von 5.000€ erreicht?

c) Wie hoch muss der Zinssatz sein, damit eine Einlage von 250.000€ in 7 Jahren 300.000€ Endkapital erbringt?

d) Wie viele Jahre müssen 250.000€ bei 5% verzinst werden, damit sich der Betrag verdoppelt hat?

Einfache Tilgungsrechnung (Ratenkredit)

Ein Kreditbetrag S_0 (die Anfangsschuld) wird über einen festen Zeitraum (n Zinsperioden) zu einem festen Zinssatz i verliehen und soll vom Kreditnehmer so zurückgezahlt werden, dass pro Zinsperiode ein fester Anteil des Kreditbetrages, die Tilgungsrate, zurückgezahlt wird.

Die Tilgungsrate pro Zinsperiode: $T = \frac{S_0}{n}$

Die anfallenden Zinsen Z_k in der k-ten Zinsperiode $(k \in \{1; \dots; n\})$ sind zusätzlich zur Tilgungsrate zu zahlen.

Münchner Volkshochschule

Ein wenig Finanzmathematik

Einfache Tilgungsrechnung (Ratenkredit)

Begriffe:

S_0	Kreditbetrag, Anfangsschuld
p, i, q	vereinbarter [Jahres-]Zinssatz
t	Prozentsatz der 1. Tilgungsrate für Prozentannuitätentilgung
n	vereinbarte Rückzahlungsdauer in Jahren $(k \in \{1; \dots; n\})$
Z_k	Zinsen in der der k-ten Periode
T_k	Tilgung in der der k-ten Periode
A_k	Annuität in der der k-ten Periode
S_k	Restschuld am Ende der k-ten Periode

Ein wenig Finanzmathematik

Einfache Tilgungsrechnung (Ratenkredit)

Tilgungsplan:

k	S_{k-1}	Z_k	T_k	A_k	S_k
1	S_0	$S_0 \cdot i$			
2					
$\ldots$					
n					$-$
$Summe$	$-$		S_0		$-$

Münchner
Volkshochschule

Ein wenig Finanzmathematik

Ein Ratenkredit über 10.000€ für 5% Zinsen (fest), soll über 5 Jahre Laufzeit bei gleichbleibender Tilgung zurückbezahlt werden:

Jahr k	S(k-1)	Z(k)	T(k)	A(k)	S(k)
1	10.000	500			
2					
3					
4					
5					0
Summe					

Elementare Geometrie

Geometrie („Geo“: gr. Erde; „metron“: gr. messen)

Die Geometrie der ungekrümmten Ebene geht auf Euklid zurück
Die sog. Euklidische Geometrie untersucht damit die Zusammenhänge zwischen Punktmengen in der Ebene

Neben der Untersuchung der bekannten Formen, wie Dreiecke, Quadrate usw. basiert die so erfolgreiche Formalisierung der Geometrie im Wesentlichen auf zwei Konzepten:

1) Die Welt ist aus Punkten (kleinste geometrische Einheit ohne Ausdehnung) aufgebaut, welche beliebig dicht liegen.

2) Zahlenmengen können als Anordnungen von Punkten dargestellt werden. (z.B. $\mathbb{R}$ als Zahlenstrahl)

(Rene Descartes (1596-1650), franz. Mathematiker führte das später nach Ihm benannte kartesische Koordinatensystem ein.)

Münchner Volkshochschule

Elementare Geometrie

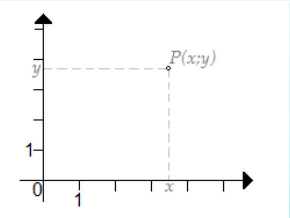
- Das Produkt von Mengen:

Das Produkt $A \times B$ von zwei nichtleeren Mengen A und B ist definiert durch die folgende Menge von Paaren:

$$A \times B := \{(a; b) | a \in A \; und \; b \in B\}$$

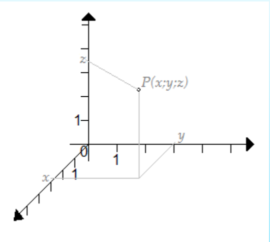
- $\Rightarrow$ Der $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x; y) |\, x, y \in \mathbb{R}\}$

Jedem Punkt in der Ebene werden eindeutig zwei Koordinaten $(x \; und \; y)$ zugeordnet, welche die Lage des Punktes zum Ursprung beschreiben.



- $\Rightarrow$ Der $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x; y; z) |\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Jedem Punkt in der Raum werden eindeutig drei Koordinaten $(x, y \; und \; z)$ zugeordnet, welche die Lage des Punktes zum Ursprung beschreiben.



Objekte der Geometrie:

Punkt: Punkte sind die Grundbausteine der Geometrie. Sie werden als kleine Kreuze (×) oder „Knödel“ (•) gezeichnet und werden mit lateinischen Großbuchstaben beschriftet.

$\cdot\, A$

Strecke: Eine Strecke ist die Menge aller Punkte, welche auf dem Weg der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten A und B liegen:

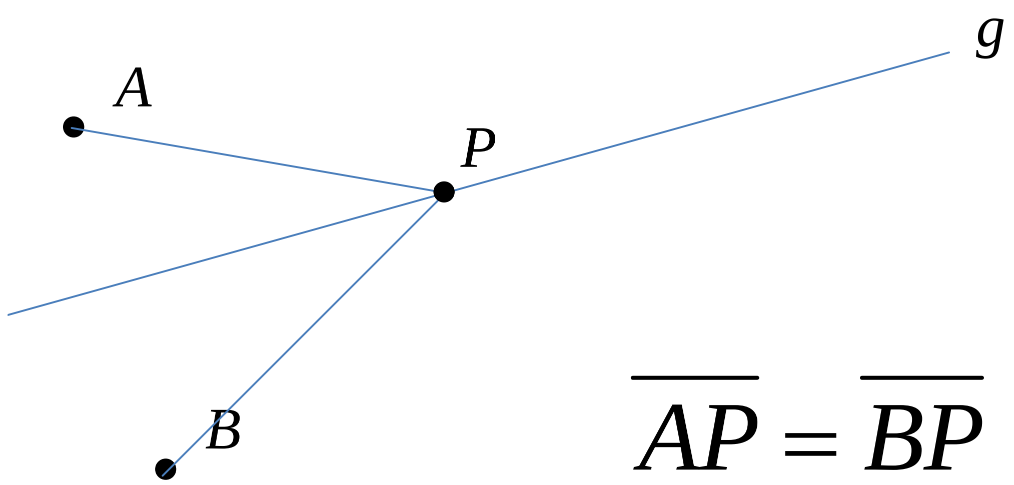
$[AB]$

Länge: Die Länge einer Strecke ist ein Maß für den Abstand zwischen den zwei Punkten A und B, welche sie verbindet.

$\overline{AB}$

Figuren der ebenen Geometrie:

Gerade: Eine Gerade ist die Menge aller Punkte einer Ebene,
g welche zu zwei festen Punkten A und B derselben Ebene den gleichen Abstand haben.



$$\overline{AP} = \overline{BP}$$

Figuren der ebenen Geometrie:

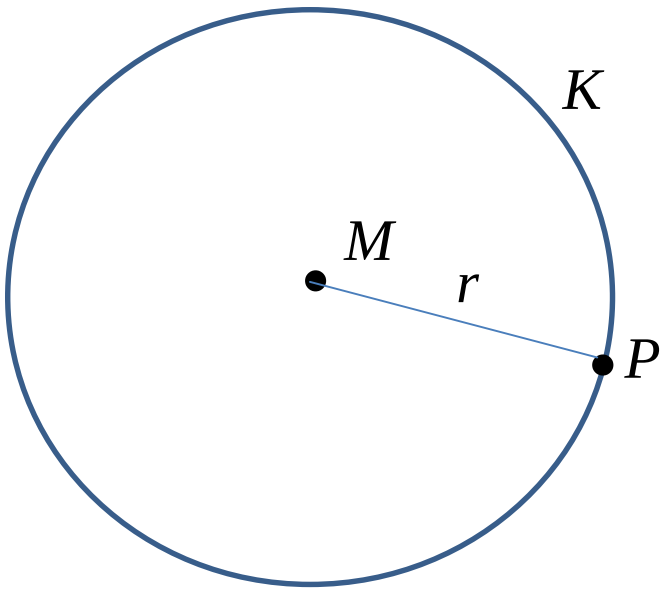
Gerade:

g

Figuren der ebenen Geometrie:

Kreis: K

Ein Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene, welche zu einem festen Punkt M derselben Ebene den gleichen Abstand r haben.



M: Mittelpunkt
r: Radius

$$\overline{MP} = r$$

Figuren der ebenen Geometrie:

Kreis:

K

M: Mittelpunkt
r: Radius

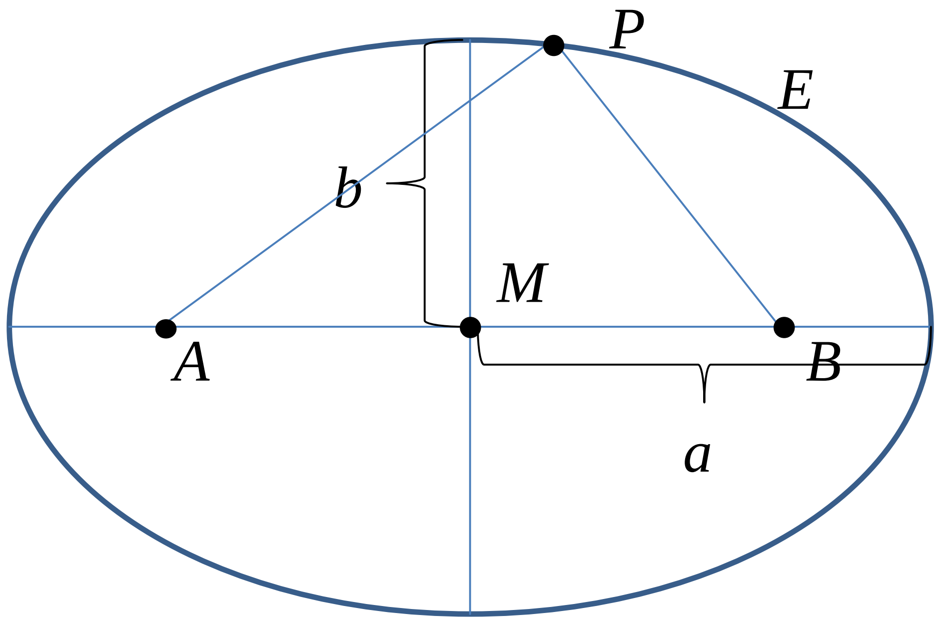
Münchner Volkshochschule

Elementare Geometrie

Figuren der ebenen Geometrie:

Ellipse: Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte einer Ebene, welche in der Summe zu zwei festen Punkt A und B derselben Ebene den gleichen Abstand haben.

E



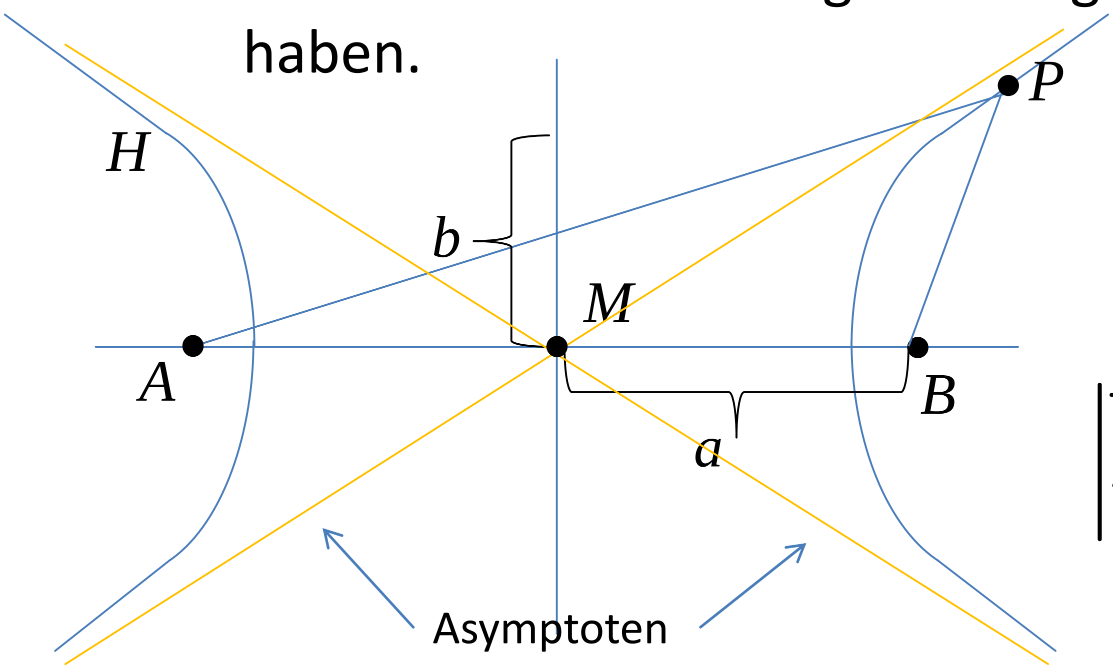
M: Mittelpunkt
a,b: Halbachsen

$$\overline{AP} + \overline{BP} = 2a$$

Figuren der ebenen Geometrie:

Hyperbel: Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte einer Ebene,

H welche in der Differenz zu zwei festen Punkt A und B derselben Ebene betraglich den gleichen Abstand haben.



M: Mittelpunkt
a: reelle Halbachse
b: Imaginäre Halbachse

$$\left| \overline{AP} - \overline{BP} \right| = 2a$$