Tag 05

Themen

- Logik und Mengenlehre
- Zahlensysteme und Arithmetik
- Gleichungen und Ungleichungen
- Lin. Gleichungssysteme und spez. Anwendungen
- Geometrie und Trigonometrie
- Vektoren in der Ebene und Punktemengen
- Funktionen einer Veränderlichen
- Zahlenfolgen und Konvergenz
- Differenzialrechnung
- Integralrechnung

Lösen von Gleichungen

Wurzelgleichungen

z.B. $\sqrt{x+3} = 2x$

0) Definitionsmenge bestimmen $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus]-\infty; -3[$

1) Die Wurzeln über Isolieren und Quadrieren eliminieren:

$$\sqrt{x+3} = 2x \quad |(.)^2$$

$$x+3 = 4x^2$$

2) Lösungen bestimmen: $\{1; -0{,}75\}$

3) Die Probe(n) durchführen und $\mathbb{L}$ bestimmen:

$\sqrt{1+3} = 2$ $\qquad$ $\text{Lsg.: x} = 1$

$\sqrt{-\frac{3}{4}+3} = \frac{3}{2} \neq -\frac{3}{2}$ $\qquad$ $\text{keine Lsg.: x} = \text{-0,75}$

$\mathbb{L} = \{1\}$

Die Betragsfunktion

Def.: Betrag

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist deren Betrag (in Zeichen $|x|$) wie folgt definiert:

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Rechenregeln zum Betrag:

i) $-|a| \leq a \leq |a|$

ii) $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ und $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

iv) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Lösen von Gleichungen

Betragsgleichungen

z.B. $|x^2+x-6|=|x-1|$

0) Definitionsmenge bestimmen $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

1) Die Einzelfälle der Betragsanteile bestimmen:

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & x\geq 1 \\ 1-x & x<1 \end{cases}\;;\quad |x^2+x-6|=\begin{cases} x^2+x-6 & x\in\mathbb{R}\setminus]-3;2[\\ -(x^2+x-6) & x\in]-3;2[\end{cases}$$

2) Definitionsmengen der Gleichungsvarianten bestimmen:

1. $x^2+x-6=-(x-1) \qquad \mathbb{D}=]-\infty;-3]$
2. $-(x^2+x-6)=-(x-1) \qquad \mathbb{D}=]-3;1[$
3. $-(x^2+x-6)=x-1 \qquad \mathbb{D}=[1;2[$
4. $x^2+x-6=x-1 \qquad \mathbb{D}=[2;\infty[$

3) Lösen der Einzelfälle und aufstellen der Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}=\left\{-1-2\sqrt{2}\,;-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\,;-1+2\sqrt{2}\,\right\}$$

Lösen von Ungleichungen

Ungleichungen

Wesentliche Unterschiede im Vergleich zum Lösen von Gleichungen:

1. Das Ungleichheitszeichen kann sich umkehren.
2. Die Lösungsmengen können Intervalle sein.
3. Bei der Multiplikation mit Termen können Fallunterscheidungen notwendig sein.

Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen:

Lösen von Ungleichungen

Ungleichungen

Wesentliche Unterschiede im Vergleich zum Lösen von Gleichungen:

1. Das Ungleichheitszeichen kann sich umkehren.
2. Die Lösungsmengen können Intervalle sein.
3. Bei der Multiplikation mit Termen können Fallunterscheidungen notwendig sein.

Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen:

1. Die Addition von Termen, die Multiplikation mit positiven Termen und das Anwenden von streng monoton wachsenden Funktionen auf beiden Seiten der Ungleichung **ändern die Ausrichtung des Ungleichheitszeichens nicht**.
2. Die Multiplikation mit negativen Termen und das Anwenden von streng monoton fallenden Funktionen auf beiden Seiten der Ungleichung **kehren die Ausrichtung des Ungleichheitszeichens um**.

Lösen von Ungleichungen

Ungleichungen

z.B. $$2 < \frac{2}{x-2}$$

0) Definitionsmenge bestimmen $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

1) Die Einzelfälle bei der Multiplikation mit $(x-2)$ aufstellen:

$$\begin{array}{llll} 1.: & (x-2) > 0 & \Rightarrow & (x-2) \cdot 2 < 2 \\ 2.: & (x-2) < 0 & \Rightarrow & (x-2) \cdot 2 > 2 \end{array}$$

2) Lösen der Einzelfälle und Abgleich der Lösungen mit den Voraussetzungen:

$$\begin{array}{llll} 1. (x > 2): & x < 3 & \Rightarrow & \mathbb{L} =]2;3[\\ 2. (x < 2): & x > 3 & \Rightarrow & \mathbb{L} = \{\,\} \end{array}$$

Themen

- Logik und Mengenlehre
- Zahlensysteme und Arithmetik
- Gleichungen und Ungleichungen
- Lin. Gleichungssysteme und spez. Anwendungen
- Geometrie und Trigonometrie
- Vektoren in der Ebene und Punktemengen
- Funktionen einer Veränderlichen
- Zahlenfolgen und Konvergenz
- Differenzialrechnung
- Integralrechnung

Lineare Gleichungssysteme

Rätsel:

Klaus und Anna sitzen einander gegenüber und besitzen je eine feste Menge an Würfeln.

- Wenn Klaus an Anna einen seiner Würfel geben würde, so besäße Anna doppelt so viele Würfel wie Klaus.
- Würde hingegen Anna einen ihrer Würfel an Klaus abgeben, so besäßen beide gleichviele Würfel.

- <u>Wie viele Würfel besitzen Klaus und Anna jeweils?</u>

Münchner Volkshochschule

Lineare Gleichungssysteme I

Lösungsschritte:

1) Benennung der Variablen:

$$x: \text{Anzahl der Würfel von Klaus}$$

$$y: \text{Anzahl der Würfel von Anna}$$

2) Aufstellen der Gleichungen:

- Wenn Klaus an Anna einen seiner Würfel geben würde, so besäße Anna doppelt so viele Würfel wie Klaus.

$$I: \ (x-1)\cdot 2 = y+1$$

- Würde hingegen Anna einen ihrer Würfel an Klaus abgeben, so besäßen beide gleichviele Würfel.

$$II: \ y-1 = x+1$$

Münchner Volkshochschule

Lineare Gleichungssysteme II

Lösungsschritte:

3) Das lineare Gleichungssystem (LGS) sortieren

$$\begin{array}{l} I:\ (x-1)\cdot 2 = y+1 \\ II:\ x+1 = y-1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I:\ 2x - y = 3 \\ II:\ x - y = -2 \end{array}$$

4) Lösungsverfahren anwenden

Substitutionsverfahren, Additionsverfahren, Gaußverfahren, Matrixinverse, Cramersche Regel, ...

5) Lösungsmenge und Antwort

$\mathbb{L} = \{ x = 5 \wedge y = 7 \}$ A: Klaus besitzt 5 Würfel und Anna 7.

Lineare Gleichungssysteme III

Lösungsverfahren: Das Substitutionsverfahren

$$I: \; 2x - y = 3$$

$$II: \; x - y = -2$$

1) Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen

$$II: \; x = y - 2$$

2) Die abhängige Variable durch die unabhängige in der anderen Gleichung ersetzen und die Gleichung lösen

$$x \text{ in } I: \quad 2(y-2) - y = 3 \quad |+4 \quad \Rightarrow \quad y = 7$$

3) Die bestimmte Variable in eine Gleichung einsetzen und den Wert der fehlenden Variable bestimmen.

$$y \text{ in } II: \qquad x - 7 = -2 \quad |+7 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

Münchner
Volkshochschule

Übung 24: Substitutionsverfahren

Lösen Sie die folgende Aufgabe aus dem alten Babylon (ca. 2000 v.Chr.) mit Hilfe des Substitutionsverfahrens:

Ein Viertel der Breite zur Länge addiert ergibt 7 Handbreiten. Länge und Breite addiert machen 10 Handbreiten.

Achten Sie dabei auf die ausführliche Dokumentation Ihrer Rechnung.

Lineare Gleichungssysteme IV

Lösungsverfahren: Das Additionsverfahren

$$I: \; 2x - y = 3$$

$$II: \; x - y = -2$$

1) Der Grundgedanke dieses Ansatzes ist, dass sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht ändert, wenn man:
   - Zwei Gleichungen addiert
   - Eine Gleichung mit einer Zahl ($\neq 0$) multipliziert
   - Zwei Gleichungen vertauscht.
2) Durch skalare Multiplikation und Addition von Gleichungen wird eine der Variablen eliminiert.

Münchner Volkshochschule

Lineare Gleichungssysteme V

Lösungsverfahren: Das Additionsverfahren I

$$I:\ 2x - y = 3$$

$$II:\ x - y = -2$$

$$I - II:\ 2x - y - (x - y) = 3 - (-2)$$

$$\Rightarrow \qquad x = 5$$

3) Einsetzen der bestimmten Variable

$$x \text{ in } II:\ 5 - y = -2 \quad |-5| \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \qquad y = 7$$

Münchner Volkshochschule

Übung 25: Additionsverfahren

Lösen Sie die folgende Aufgabe von Geronimo Cardano (1501-1576) mit Hilfe des Additionsverfahrens:

7 Ellen grüner Seide und 3 Ellen schwarzer Seide kosten 72 Pfund. 2 Ellen grüner Seide und 4 Ellen schwarzer Seide kosten 52 Pfund.

Achten Sie dabei auf die ausführliche Dokumentation Ihrer Rechnung.