Tag 03

Potenzen

Für $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^+$ kann die Potenz $\boldsymbol{a^n}$ auch für $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}$ definiert werden.

Es gelten weiterhin die folgenden Rechengesetze:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$; $a^{n^m} = a^{(n^m)}$

Und die Definition $a^{-1} := \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$

Hinzu kommt die Definition der Wurzel (resp. rationale Exponenten)

- $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$; $a \geq 0, n \in \mathbb{N}$

Die Betragsfunktion

Def.: Betrag

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist deren Betrag (in Zeichen $|x|$) wie folgt definiert:

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Rechenregeln zum Betrag:

i) $-|a| \leq a \leq |a|$

ii) $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ und $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

iv) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Potenzen

Die Potenzgleichung $\boldsymbol{x^n = a}$; $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N}}$ kann für $\boldsymbol{x}$ durch die $\boldsymbol{n}$-te Wurzel gelöst werden.

Wurzelexponent

Radikand

$$x^n = a \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt[n]{a}}$$

Es wird definiert: $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} \quad (a \geq 0, n \in \mathbb{N})$; $\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$

(Bem.: $a \geq 0, n$ gerade und (Spezialfall) $a \in \mathbb{Z}, n$ ungerade)

$$\sqrt{a^2} = |a| \;\; ; \;\; (\sqrt{a})^2 = a, (a \geq 0)$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \;\; ;$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \; ; \; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Potenzen

Jede Potenz a^b ist mindestens definiert für $a \in \mathbb{R}^+$ und höchstens für alle $a \in \mathbb{R}$.

$b \in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}_0^-$	$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$
$\mathbb{D}_{max}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+$

Achtung:

Beim Anwenden von Potenzrechenregeln ist der Definitionsbereich für die Basis zu beachten.

z.B.: $\left((-2)^2\right)^\pi = 4^\pi$ ist definiert; $(-2)^{2\pi}$ ist nicht definiert.

Potenzen

Klammerausdrücke

- Multiplikation mehrerer Summen in Klammern

$$(3a + 4b) \cdot (5b - 6) = 15ab - 18a + 20b^2 - 24b$$

$\Rightarrow$ Jeder einzelne Summand in der ersten Klammer muss mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert und die jeweiligen Produkte addiert werden.

- Spezialfall binomische Formeln

$$\begin{aligned} I: &\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ II: &\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ III: &\quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Potenzen

Multiplizieren Sie:

a) $\left(2x^2+4x-5\right)\cdot\left(x-4\right)=$

b) $\left(x^4+3x^2-11\right)\cdot\left(2x-5\right)=$

c) $\left(-3x^5+2x+10\right)\cdot\left(2x^2+3x-6\right)=$

d) Schreiben Sie auf einen Bruchstrich: $\frac{1}{\mathrm{a}+1}+\frac{1}{\mathrm{a}+2}+\frac{1}{\mathrm{a}+3}$ für $\mathrm{a}\notin\{-1;-2;-3\}$

e) $\left(x-5\right)\cdot\left(y-3\right)-\left(x+5\right)\cdot\left(y-3\right)=$

Potenzen

Klammerausdrücke: Das Pascalsche Dreieck *I*

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3$$

$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4$$

$$\vdots$$

Klammerausdrücke: Das Pascalsche Dreieck II

Das Dreieck der Binomialkoeffizienten

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow (a+b)^5 =$$

Münchner Volkshochschule

Potenzen

Vereinfachen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

a) $(a-b)^2+(a+b)^2$

b) $\left(\sqrt{xy}-1\right)\cdot\left(-1-\sqrt{xy}\right)$ für $x \cdot y \geq 0$

c) $\dfrac{s^2-t^2}{2s^2+4st+2t^2}$

d) $\dfrac{9a^2-2b^2}{3\sqrt{2}a-2b}$

e) $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ $\mathit{für}\ x \neq 0,\ y \neq 0, \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \neq 0$

f) Bestimmen Sie: $(4-x)^4-(4-x)^3$

g) Bestimmen Sie: $(v-6)^6$

Logarithmen

Die Exponentialgleichung $a^x = b;\ a, b \in \mathbb{R}^+$ kann formal für x durch den Logarithmus zur Basis a gelöst werden.

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(b)$$

Numerus

Basis

Argument

Der Logarithmus von b zur Basis a beantwortet die Frage nach der Zahl, mit der man die Basis a potenzieren muss, um b zu erhalten:

$$\boxed{a^{\log_a(b)} = b}$$

Logarithmen

Es gelten die folgenden Logarithmus-Rechenregeln

$(a, b, c, d \in \mathbb{R}^+)$

$$\boxed{a^{\log_a(b)} = b}$$

$$\boxed{\log_a(a) = 1 \qquad \log_a(1) = 0 \qquad \log_a(a^n) = n}$$

$$\log_a(c^y) = y \cdot \log_a(c)$$

$$\log_a(c \cdot d) = \log_a(c) + \log_a(d)$$

$$\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a(c) - \log_a(d)$$

Logarithmen

Der Basiswechsel bei Logarithmen: $(a, c, d \in \mathbb{R}^+)$

$$\boxed{\log_a(c) = \frac{\log_d(c)}{\log_d(a)}}$$

$$\text{z. B.:} \quad \log_8(128) = \frac{\log_2(128)}{\log_2(8)} = \frac{7}{3}$$

(Die Basiswechseleigenschaft ermöglicht es, genau einen Logarithmus (den „Logarithmus Naturalis“) zu definieren und alle anderen von diesem abzuleiten.)

Logarithmen

Spezielle Logarithmen:

- **Der „Logarithmus Naturalis“:**

$$\ln(c) := \log_e(c)$$

(mit der Eulerschen Zahl: $e \approx 2{,}718281828\ldots$)

- **Der dekadische Logarithmus:**

$$\log(c) := \lg(c) := \log_{10}(c)$$

- **Der „Logarithmus Binäris“:**

$$\mathrm{lb}(c) := \mathrm{ld}(c) := \log_2(c)$$

(Auch „Logarithmus Dualis“ genannt.)

Summen- und Produktzeichen

Kurzschreibweisen für regelmäßig gebildete Summen oder Produkte.

Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Produktzeichen

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Σ: Sigma; griech. „S“ für Summe

Π: Pi; griech. „P“ für Produkt

Münchner Volkshochschule

Summen- und Produktzeichen

Bezeichnungen und Sonderfälle:

Obergrenze (OG)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad\qquad \prod_{i=1}^{n} a_i$$

i : Laufindex

Untergrenze (UG)

Sonderfälle:

1) OG ≡ UG : $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \qquad \prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$

2) OG < UG : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n-1} a_i := 0 \qquad \prod_{i=n}^{n-1} a_i := 1$