Tag 02

Münchner
Volkshochschule

Themen

- Logik und Mengenlehre
- Zahlensysteme und Arithmetik
- Gleichungen und Ungleichungen
- Lin. Gleichungssysteme und spez. Anwendungen
- Geometrie und Trigonometrie
- Vektoren in der Ebene und Punktemengen
- Funktionen einer Veränderlichen
- Zahlenfolgen und Konvergenz
- Differenzialrechnung
- Integralrechnung

Zahlenmengen

Die Zahlenmengen:

1) $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$ Die natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$

2) $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots\}$ Die ganzen Zahlen

3) $\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ ist ein Bruch}\}$ Die rationalen Zahlen

$= \{\frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

4) $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist ein Dezimalbruch}\}$

Die reellen Zahlen

Rechenoperationen in $\mathbb{N}$:

Addition:

Sei $N \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit n Elementen und $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit m Elementen, mit $N \cap M = \emptyset$.

Dann erklärt $N \cup M$ als Menge mit $n + m$ Elementen die Addition.

Multiplikation:

erklärt die Multiplikation, eine n-malige Addition

$$\Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{N}: a + b \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a \cdot b \in \mathbb{N}$$

Umkehrung:

Die Aussageformen $a + x = b$ und $a \cdot x = b$, mit $a, b \in \mathbb{N}$ können auch für alle $x \in \mathbb{N}$ falsch sein.

Zahlenmengen

Rechenoperationen in $\mathbb{Z}$:

Addition:

$$\forall_{a,b\in\mathbb{Z}}\ \exists_{x\in\mathbb{Z}}\colon a + x = b$$

Multiplikation:

Umkehrung:
Die Aussageform $a \cdot x = b$, mit $a, b \in \mathbb{Z}$ kann auch für alle $x \in \mathbb{Z}$ falsch sein.

Rechenoperationen in $\mathbb{Q}$:

In der Menge der rationalen Zahlen sind die Addition und Multiplikation von Zahlen endlich oft uneingeschränkt möglich.

Elementare Rechenregeln in $\mathbb{Q}$:

Bezeichnungen:

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{b}$$

Zähler

Nenner

Berechnungen an einem Bruch:

Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} = 0,75 = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8} = 0,75$

Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$ $\qquad$ $\frac{8}{12} = 0,\overline{6} = \frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$

Vergleich: $\frac{q_1}{p_1} = \frac{q_2}{p_2} \Leftrightarrow q_1 \cdot p_2 = q_2 \cdot p_1$

Zahlenmengen

Elementare Rechenregeln in $\mathbb{Q}$:

- Multiplikation und Division von Brüchen:

Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ **z.B.** $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$

Division: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ **z.B.** $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$

- Bem.: Ganz Zahlen werden als Brüche betrachtet: $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = \frac{a}{1}$
- Addition und Subtraktion von Brüchen:

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$ **z.B.** $\frac{3}{4} \pm \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} \pm \frac{5 \cdot 4}{4 \cdot 7} = \frac{21 \pm 20}{28}$

Zahlenmengen

$\mathbb{Q}$ ist als Zahlenmenge für die höhere Mathematik nicht ausreichend, auch wenn Computer ausschließlich und hocheffektiv in $\mathbb{Q}$ rechnen.

Rechenoperationen in $\mathbb{R}$:

In der Menge der reellen Zahlen sind die Addition und Multiplikation von Zahlen uneingeschränkt möglich.

Zahlenmengen

$\mathbb{Q}$ ist als Zahlenmenge für die höhere Mathematik nicht ausreichend, auch wenn Computer ausschließlich und hocheffektiv in $\mathbb{Q}$ rechnen.

Rechenoperationen in $\mathbb{R}$:

In der Menge der reellen Zahlen sind die Addition und Multiplikation von Zahlen uneingeschränkt möglich.

$\mathbb{R}$ zusammen mit den beiden Rechenoperationen der Addition und der Multiplikation und den zugehörigen Rechengesetzen bildet damit die Grundlage für die „Hochschulmathematik“.

Rechengesetze für $\mathbb{R}$

$(a, b, c, 0{,}1, a^{-1} \in \mathbb{R})$

Operationen:	+	·
Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$
Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a \cdot b=b \cdot a$
Existenz des neutralen Elements	$a+0=a$	$a \cdot 1=a$
Existenz des inversen Elements	$a+(-a)=0$	$a \cdot a^{-1}=1 \;\; (a \neq 0)$
Distributivgesetz	$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$	

Zahlenmengen II

Die Menge $\mathbb{R}$, zusammen mit den zwei Verknüpfungen „·“ und „+“ und den Rechengesetzen, bezeichnen die Mathematiker als „**Körper**“.

Übung 12: Zahlenmengen

Nicht alle Zahlenmengen sind Körper. Welche der Rechengesetze, die wir für $\mathbb{R}$ kennen gelernt haben, gelten nicht in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Q}$?

Wie nennt man die beiden Ausführungsrichtungen des Distributivgesetzes?

Vereinbarungen zu den Rechengesetzen für $\mathbb{R}$

$(a, b \in \mathbb{R})$

$$a + (-b) = a - b$$

$\frac{1}{a} := a^{-1}, (a \neq 0)$	$ab := a \cdot b$
$\frac{b}{a} := b \cdot \frac{1}{a}, (a \neq 0)$	$a - b := a + (-b)$

Alle weiteren Beziehungen müssen bewiesen werden!!!

Folgerungen aus den Rechengesetzen für $\mathbb{R}$

$(a, b \in \mathbb{R})$

Es existiert nur eine Null . Es existiert nur eine Eins.	Für alle a existiert nur je genau ein Inverses Element für + und • (a≠0).
$(-a)\cdot b = -ab$	$(-1)\cdot a = -a$
$a \cdot 0 = 0$	$(a^{-1})^{-1} = a$
$(-a)\cdot(-b) = ab$	$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
$-(-a) = a$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(uvm.)

Wdh.: elementare Rechenregeln (aus der Schule bekannt)

1. Klammern werden immer zuerst ausgerechnet.
2. Potenzen werden nach Klammern ausgerechnet.
3. Punktrechnung wird nach Potenzen ausgerechnet.
4. Strichrechnung wird nach Punktrechnung ausgerechnet.

Münchner Volkshochschule

Zahlenmengen

Bezeichnungen zu Rechenoperationen

$$a + b = s$$

Die Summe (Ergebnis der Addition)

1. Summand 2. Summand

$$a - b = d$$

Die Differenz (Ergebnis der Subtraktion)

Minuend Subtrahend

$$a \cdot b = p$$

Das Produkt (Ergebnis der Multiplikation)

1. Faktor 2. Faktor

$$a : b = q$$

Der Quotient (Ergebnis der Division)

Dividend Divisor

Intervalle

$I \subseteq \mathbb{R}$ heißt Intervall, wenn mit beliebigen $a, b \in I$ auch jede Zahl x zwischen a und b zu I gehört.

1) Endliche Intervalle ($a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$)

$[a;b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Intervall

$]a;b] = \{x \mid a < x \le b\}$

$[a;b[= \{x \mid a \le x < b\}$

halboffene Intervalle

$]a;b[= \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

Übung: Intervalle

Für welche Mengen stehen die folgenden Intervalle?

1) $[a;a]$
2) $]a;a[$
3) $]0;4[$
4) $]-1;-2[$

Intervalle I

Die Symbole ∞ und $-\infty$ sind wie folgt definiert:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ gilt } x < \infty. \Rightarrow \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ gilt } x > -\infty$$

$$\Rightarrow \ \infty, -\infty \notin \mathbb{R}$$

2) Unendliche Intervalle $(a, b \in \mathbb{R})$

$$[a;\infty[= \{x \mid a \le x\}$$

$$]a;\infty[= \{x \mid a < x\}$$

$$]-\infty;b[= \{x \mid x < b\}$$

$$]-\infty;b\,] = \{x \mid x \le b\}$$

Intervalle II

Besondere Intervalle:

$$\mathbb{R}^{+} =]0;\infty[$$

$$\mathbb{R}_0^{+} = [0;\infty[$$

$$\mathbb{R}^{-} =]-\infty;0[$$

$$\mathbb{R}_0^{-} =]-\infty;0]$$

Münchner Volkshochschule

Übung: Intervalle I

Für welche Mengen stehen die folgenden Intervalle?

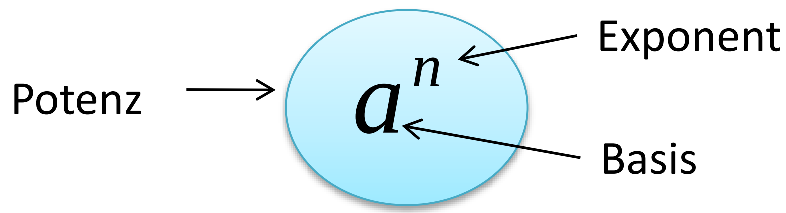
1) $]-\infty\,;\infty\,]$

2) $]-5;\infty[$

3) $]0;\infty[$

4) $]-\infty;-2[$

Potenzen



$$\text{Def.}: a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal}}$$

Es gelten die folgenden Rechengesetze:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- $a^{n^m} = a^{(n^m)}$

Definition und Folgerungen:

- $a^{-1} := \frac{1}{a}\ (a \neq 0) \Rightarrow a^0 = 1\ \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$ ist damit möglich.