Prof. Dr. N.Mahnke

Zusatzübungen 08 zum mathematischen Vorkurs der MVHS: Lösungen

1. Bestimmen Sie die folgenden Kombinationen der Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -0,25 \\ 3 \end{pmatrix} \;, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   jeweils grafisch und algebraisch:

   (a)
$$3\vec{u} - 2\vec{v} + 0,5\vec{w} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -6,5 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\vec{u} + 4\vec{v} - 2\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Berechnen Sie den Betrag des folgenden Vektors $\vec{u}$. Gibt es Werte von a, für welche der Betrag zu eins wird?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{u}| = \sqrt{11 + 2a + a^2}$$

   Für keinen Wert von a nimmt der Betrag von $\vec{u}$ den Wert 1 an.

3. Untersuchen Sie, ob die folgenden Dreiecke gleichschenklig, rechtwinklig oder sogar gleichseitig sind.

   (a)
$$A_2(1/0/2)\ ;\ B_2(10/8/10)\ ;\ C_2(12/2/8)$$

   ein gewöhnliches Dreieck

   (b)
$$A_3(1/1/1)\ ;\ B_3(4/4/1)\ ;\ C_3(2,5/2,5/\sqrt{12,5})$$

   gleichschenkliges Dreieck

   (Tipp: Vergleich der Seitenlängen)

4. Gegeben sind die drei Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;, \; y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;, \; z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$$

   (a) Berechnen Sie jeweils paarweise das Skalarprodukt der drei Vektoren x, y, z und bestimmen Sie den eingeschlossenen Winkel zwischen x und y.

$$\langle x; y\rangle = 4,\ \langle x; z\rangle = 5 + 3c,\ \langle y; z\rangle = 2c - 2,\ \varphi = \angle(x; y) = 1,072 \equiv 61,44°$$

   (b) Berechnen Sie einen Vektor w, der orthogonal zu x und zu y ist.

$$w = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Gibt es einen Wert von $c \in \mathbb{R}$, so dass das von y und z aufgespannt Dreieck gerade den Flächeninhalt 1 besitzt?

Nein, für keinen Wert von c nimmt das von y und z aufgespannte Dreieck den Flächeninhalt 1 an.

5. Geben Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich für die folgenden Funktionen an:

(a)
$$f(x) = 7x - \sqrt{x} \;\Rightarrow\; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$$

(b)
$$f_1(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}} \;\Rightarrow\; \mathbb{D}_{f_1} =]-1;1[$$

(c)
$$f_3(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 6x + 8} \;\Rightarrow\; \mathbb{D}_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{2;4\}$$

(d)
$$f_4(x) = x^x \;\Rightarrow\; \mathbb{D}_{f_4} = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^- \,\middle|\, |q| = 2n-1 \wedge n \in \mathbb{N} \right\} \cup \mathbb{R}^+$$

(e)
$$f_5(x) = \frac{x}{x} \;\Rightarrow\; \mathbb{D}_{f_5} = \mathbb{R}^*$$

6. Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen, so wie die Bereiche positiver und negativer Funktionswerte:

(a)
$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$
$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} f(x) > 0 \quad \forall x \in \left]k \cdot \pi \,;\, \frac{(2k+1)}{2}\pi\right[\\ f(x) < 0 \quad \forall x \in \left]\frac{(2k+1)}{2}\pi \,;\, (k+1)\cdot\pi\right[\end{array} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

(b)
$$f(x) = \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \;\Rightarrow\; f(x) > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$$

(c)
$$f(x) = \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^- \end{array}$$

7. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion beschränkt ist

$$f(x) = \frac{10}{1+x^2}$$

und finden Sie eine Schranke für f. Welches Monotonieverhalten zeigt die Funktion auf $\mathbb{R}^+$?

- f ist eine gerade Funktion $\Rightarrow$ Beschränkung auf $x \in \mathbb{R}_0^+$ möglich.
- f ist auf $\mathbb{R}_0^+$ s.m.f.
- $\Rightarrow$ f besitzt in $x = 0$ seinen größten Wert: $f(0) = 10$.

- f ist nach unten beschränkt, denn

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

- Eine Schranke S für f ist damit $S = 10$.

8. Seien die folgenden Funktionsterme gegeben $f(x) = x^2-3$ und $g(x) = x+x^3$. Bestimmen Sie die Symmetrie der folgenden Kompositionen $f \pm g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ und bestimmen Sie, wenn möglich, den Term der Umkehrfunktion zu $\frac{g(x)}{f(x)\cdot x}$.

   (a)
   $$(f \pm g)(x) = (x^2 - 3) \pm (x + x^3) \;\Rightarrow\; \text{keine Symmetrie}$$

   (b)
   $$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 3) \cdot (x + x^3) \;\Rightarrow\; \text{ungerade Symmetrie}$$

   (c)
   $$(f \circ g)(x) = ((x + x^3)^2 - 3) \;\Rightarrow\; \text{gerade Symmetrie}$$

   (d)
   $$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)\cdot x} = \frac{1+x^2}{x^2-3} \;\Rightarrow\; h^{-1}_{1,2}(x) = \pm\sqrt{\frac{1+3x}{x-1}}, \text{ mit } \mathbb{D}_{1,2} =]1;\infty[$$

9. Gibt es Funktionen welche zugleich gerade und ungerade sind?

$$\left.\begin{array}{lll} f: & \text{gerade} & f(-x) = f(x) \\ f: & \text{ungerade} & f(-x) = -f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = -f(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) = 0 \;\text{ die Nullfunktion}$$