Skript Ingenieurmathematik II: Differenzialgleichungen

Für Maschinenbauer, Fahrzeugtechniker und Flugzeugtechniker

Prof. Dr. Nils Mahnke, Prof. Dr. Georg Schlüchtermann

23. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Das eine ist sicher, dass ich mich im Leben
noch nicht annähernd so geplagt habe
und dass ich groß e Hochachtung für
die Mathematik eingeflöß t bekommen habe,
die ich bis jetzt in ihren subtileren Teilen
in meiner Einfalt für puren Luxus ansah.

Albert Einstein (1879-1955)

In diesem Abschnitt begegnen wir zum ersten Mal Gleichungen deren Unbekannte keine reellen Zahlen, sondern Funktionen sind. Dabei behandeln wir in diesem Kapitel ausschließ lich Funktionen einer Variablen. Wie der Titel ausdrückt, werden wir es mit Funktionen und deren Ableitungen zu tun haben. Dabei sind die Formen der Differenzialgleichungen sehr unterschiedlich - einerseits kommen höhere Ableitungen vor (man spricht bei der höchsten vorkommenden Ableitung von der Ordnung der Differenzialgleichung) und andererseits, wie die einzelnen Ableitungsfunktionen (die Funktion selbst ist die nullte Ableitung) miteinander verknüpft sind.
Differenzialgleichungen sind fast ausschließ lich aus der Anwendung entstanden. Dabei ist an aller erster Stelle die Physik zu nennen, um Bewegungsabläufe mittels Differenzialgleichungen erster bzw. zweiter Ordnung zu beschreiben, wobei die zweite Ordnung unter der Einbeziehung von Beschleunigung bzw. Krafteinwirkung auftritt. Und damit sind wir auch bereits bei dem ersten rigorosen Auftreten bestimmter Differenzialgleichungen, wenn auch in einfacher Form, in den Arbeiten von I. Newton.
Dennoch ist das Anwendungsgebiet weit größ er geworden und umfasst so unterschiedliche Bereiche wie die Chemie, Biologie, Soziologie und Wirtschaftwissenschaften. Dabei werden eben auf die Anwendung bezogen, verschiedenen Gleichungstypen aufgestellt - mal kommen die Ableitungen in einer linearen Gleichung (linear in den Funktionen als Unbekannte), mal

in einfachen algebraischen Ausdrücken oder gar gebrochen rationalen Funktionen vor. Anders als bei der einfachen Technik des Gleichungsauflösen in der reinen Algebra, müssen wir hier fast für jeden Typ ein eigenes Verfahren entwickeln, wobei man natürlich zwischen den Ordnungen zu unterscheiden hat. Dennoch muss gesagt werden, dass die meisten Differenzialgleichungen leider nicht in geschlossener Form lösbar sind, so wie man es meist bei den algebraischen Gleichungen gewohnt ist. Hier ist noch mehr der Einsatz von numerischen Verfahren zur Approximation der Lösung notwendig. Diese Tatsache wird sich noch weit mehr bei den so genannten partiellen Differenzialgleichungen bestätigen - Gleichungen bei denen Funktionen mehrerer Variabler vorkommen und somit die partiellen Ableitungen als natürliche Erweiterung. Allerdings ist das nicht mehr der Gegenstand dieses Bandes.
Wir werden in diesem ersten Kapitel über die so genannten gewöhnlichen Differenzialgleichungen nach einem einführenden Abschnitt mit Definitionen und grundlegenden Ergebnissen die Differenzialgleichungen erster und dann zweiter Ordnung behandeln. Dabei sind aber nur ausgewählte Typen Gegenstand der Darstellung, da wir für umfassende Untersuchungen auf die sehr umfangreiche Literatur verweisen. Abschließ end werden wir noch einen Blick auf die Systeme von Differenzialgleichungen werfen, die natürlich bei allen Bewegungsabläufen in der Technik unbedingt behandelt werden sollten. Auch hier gilt das gleiche Prinzip: nur bestimmte Typen werden wir genauer untersuchen.
Bevor wir uns mit der rigorosen Darstellung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen beschäftigen, geben wir ein paar Beispiele aus der Technik, den Wirtschaftswissenschaften und der Biologie, um einen ersten Einblick in den Anwendungsbereich zu geben. Dabei kommt es uns nur auf das Aufstellen der Gleichungen an und weniger um mögliche Lösungsansätze.

Beispiel 1.0.1. *1. Gegeben ist ein Widerstand R und ein in Reihe geschalteter Kondensator C wird aufgeladen. Zur Zeit $t_0 = 0$ wird mit Spannung U_0 eingeschaltet; die Spannung am Kondensator zur Zeit t werde mit $U_C(t)$ bezeichnet. Gesucht sind $I(t)$ und $U_C(t)$ abhängig von der Zeit t. Sei Q die Ladung des Kondensators. Dann gilt*

$$Q(t) = C \cdot U_C(t), Q(0) = 0.$$

Es ist

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$$

und damit

$$I(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt}(t).$$

Außerdem gilt

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = R \cdot I(t) + U_C(t) \;\Rightarrow\; U_C(t) = U_0 - R \cdot I(t)$$

und

$$\frac{dU_C}{dt}(t) = -R \cdot \frac{dI}{dt}(t) \;\Rightarrow\; \frac{dI}{dt}(t) = -\frac{1}{RC} I(t)$$

Letztere ist eine klassische Differenzialgleichung: Linke Seite Ableitung - rechte Seite Funktion.

Lösung durch Raten: Ableitung=-Funktion ⇒ Exponentialfunktion. Also

$$I(t) = -e^{-\frac{t}{RC}} \text{ aber auch } I(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Außerdem

$$U_C(t) = U_0 - R \cdot Ke^{-\frac{t}{RC}}.$$

Da

$$U_C(0) = 0 \;\Rightarrow K = \frac{U_0}{R} \;\Rightarrow$$
$$U_C(t) = U_0\big(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\big).$$

2. *(Räuber-Beute-Modell) Wir betrachten zwei Populationen: Die Räuber (Füchse) und die Beute (Hasen). Die Anzahl der Hasen in einem Gebiet bezeichnen wir zur Zeit t mit $x(t)$, die der Füchse mit $y(t)$. Gibt es keine Räuber, so ist die Zuwachsrate der Hasen proportional zur Anzahl, d.h.*

$$\dot{x}(t) = ax(t), \; a > 0 \tag{1.1}$$

und gibt es keine Beute, so nimmt die Fuchspopulation proportional zur Anzahl ab, d.h.

$$\dot{y}(t) = -dy(t), \; d > 0 \tag{1.2}$$

Leben beide im gleichen Revier, so ergibt sich

- *die Hasenpopulation nimmt mit der Wechselwirkung der Füchse ab, d.h. porportional zu $x \cdot y$*
- *die Fuchspopulation nimmt mit der Wechselwirkung der Beute zu, d.h. porportional zu $x \cdot y$*

Also erhalten wir folgendes System

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \; b > 0 \text{ und } \dot{y}(t) = cx(t)y(t) - dy(t). \tag{1.3}$$

Dies ist ein System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen, die als Lösung **zwei** *Funktionen hat. Dazu liegen hier im Gegensatz zum ersten Beispiel die Funktionen nicht mehr linear vor. In diesem Beispiel kann man die Gleichungen nicht getrennt lösen und dies führt hier - auch wenn es einfach aussieht - zu Lösungen in nicht mehr geschlossener Form. Wir kommen später darauf zurück.*

Wir haben hier eine aus der Physik stammende Schreibweise verwendet: $\dot{x}(t)$ wenn wir die Ableitung nach der Zeit betrachten, wie es vor allem bei Bewegungsvorgängen der Fall ist.

3. *Logistische Differenzialgleichung in den Wirtschaftswissenschaften*

   Im vorhergehenden Beispiel haben wir einen klassischen Typ einer Differenzialgleichung kennengelernt - die Wachstumsgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

   Dabei entscheidet $a > 0$ *über positives Wachstum und* $a < 0$ *über Zerfall oder negatives Wachstum.*

   In den Wirtschaftswissenschaften interessiert man sich häufig für ein Wachstum, dass natürlich durch eine bekannte Schwelle S *nach oben begrenzt ist und dessen Überschreiten sofort zu einem negativen Wachstum führt. Daher nimmt man an, dass die Wachstumsrate* $\dot{x}(t)$ *einerseits proportional zur vorhanden Größ e* $x(t)$ *und andererseits zum noch vorhandenen Spielraum* $S - x(t)$ *ist. Dann erhalten wir die so genannte logistische Differenzialgleichung*

$$\dot{x}(t) = ax(t) \cdot (S - x(t)), \ a \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

   Man erhält, wie wir später mit Hilfe der Theorie bestimmen werden, als Lösung für einen Startwert $x(0) = x_0$

$$x(t) = \frac{S}{1 + \left(\frac{S}{x_0} - 1\right) \exp(-aSt)} \tag{1.5}$$

4. *Elektrisches Netzwerk*

   Dazu betrachten wir das unten stehende Netzwerk und wollen eine Differenzialgleichung für die einzelnen Stromstärken I_1 *und* I_2 *bestimmen. Beide sind zeitabhängig.*

   Dabei haben wir folgende Größ en:

   - $I_1(\cdot)$, *bzw.* $I_2(\cdot)$: *Stromstärke in der ersten Masche bzw. zweiten Masche.*
   - C_1 *bzw.* C_2: *Kapazität des Kondensators* 1 *bzw.* 2.
   - $Q_1(\cdot)$ *bzw.* $Q_2(\cdot)$: *Die Ladungsdichte am Kondensator* 1 *bzw.* 2.
   - R_1 *bzw.* R_2. *Widerstände* 1 *und* 2.
   - $U(\cdot)$: *Spannung in der zweiten Masche (zeitabhängig).*
   - L: *Spulenstärke.*

   Nach dem 1. Kirchhoffschen Gesetz gilt folgende Stromstärken bei Verzweigungen:

   Das 2. Kirschhoffsche Gesetz besagt, dass die Summe in den Spannungsabfällen in jeder Masche gleich Null ist. Somit erhalten wir folgendes System für die zwei Maschen:

$$\begin{aligned} L\dot{I}_1 + \frac{1}{C_1}Q_1 + R_1I_1 + R_2(I_1 - I_2) &= 0 \\ \frac{1}{C_2}Q_2 + R_2(I_2 - I_1) &= U(t) \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass $\dot{Q}_j = I_j,\ j = 1,2$ gilt, und differenziert man das System erneut, so erhält man

$$\begin{aligned} L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C_1}I_1 + R_1\dot{I}_1 + R_2(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) &= 0 \\ \frac{1}{C_2}I_2 + R_2(\dot{I}_2 - \dot{I}_1) &= \dot{U}(t) \end{aligned}$$

oder anders ausgedrückt

$$\begin{aligned} L\ddot{I}_1 + (R_1 + R_2)\dot{I}_1 - R_2\dot{I}_2 + \frac{1}{C_1}I_1 &= 0 \\ -R_2\dot{I}_1 + R_2\dot{I}_2 + \frac{1}{C_2}I_2 &= \dot{U}(t) \end{aligned}$$

Es liegt also hier ein lineares System einer gewöhnlichen Dgl. zweiter Ordnung vor.

1.1 Grundlagen

Wir beginnen damit die allgemeinen Grundlagen darzustellen: Wir betrachten Funktionen einer Variablen, auf der rechten Seite kommt die Funktion vor, links steht die Ableitung. Um $y = y(x)$ zu erhalten, muss man integrieren. Somit erhält man eine Konstante. Falls die zweite Ableitung vorkommt, sind es zwei Konstanten, etc. Insgesamt kann man folgern: Hat man die n-te Ableitung in der Gleichung, so existieren n Konstanten. Damit sind die Lösungen durch Scharparameter gegeben. Diese Scharparameter werden durch Anfangs- oder Randbedingungen bestimmt. Doch wollen wir diese allgemeinen Voraussetzungen in einer Definition präzisieren.

Definition 1.1. *Eine Gleichung, in der eine oder mehrere Ableitungen von y nach x vorkommt und in der außerdem x und y (oder beide) stehen, heißt eine gewöhnliche Differenzialgleichung für y. Die höchste vorkommende Ableitung nennt man die Ordnung der Differenzialgleichung. Eine Lösung einer gegebenen Differenzialgleichung, die so viele freie Parameter enthält wie die Ordnung angibt, nennt man allgemeine Lösung. Stehen alle Terme auf einer Seite der folgenden Form*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.6}$$

so nennt man diese implizite Differenzialgleichung n-ter Ordnung. Kann man nach $y^{(n)}$ auflösen, d.h.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.7}$$

so nennt man diese explizite Differenzialgleichung n-ter Ordnung.

Eine Lösung y von (1.74) definiert auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, d.h. eine Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, bedeutet

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Lösungen sind im Moment nur bis auf Konstanten eindeutig bestimmt. Um diese Konstanten zu bestimmen, führt man Anfangswerte ein.

Definition 1.2. *Sind für eine Dgl n-ter Ordnung an einer Stelle x_0 des Definitionsbereiches (z.B. Intervall I) der Funktionswert und die Ableitungen bis zur Ordnung $(n-1)$ gegeben, so nennt man diese n Gleichungen die Anfangsbedingungen oder Anfangswerte für y. Eine Dgl mit Anfangsbedingungen heißt Anfangswertaufgabe oder Anfangswertproblem (AWP). Eine Lösung des AWP nennt man spezielle Lösung.*

Bemerkung 1.1.1.

1. *Wie muss man die Gleichung*

$$y' = f(x, y) \tag{1.8}$$

interpretieren? Auf der rechten Seite steht eine Funktion f, die auf einer Teilmenge $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist, wenn wir im einfachen Fall bleiben, dass die gesuchte Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, also eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion und keine Vektorfunktion ist. Dann muss man Gleichung (1.8) in der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{1.9}$$

lesen. Dabei ist $x \in I$, derart, dass einerseits $(x, y(x)) \in \mathcal{D}_f$ für alle $x \in I$ gilt. Man muss also ein geeignetes offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ finden und y (die Lösungsfunktion) muss dort bei $x \in I$ sowohl definiert als auch differenzierbar sein. Dann bedeutet (1.9)S, dass die Lösungskurve $y(x)$ bei $x \in I$ die Steigung $f(x, y(x))$ hat. Das bedeutet, die Funktion f (sie ist bei jedem Problem gegeben) "vermittelt" zwischen dem Punkt x und dem Funktionswert $y(x)$ auf der einen Seite und der Steigung der Funktion $y'(x)$ dort auf der anderen Seite.

2. *Verfahrensweise: Zuerst bestimme man mittels noch zu entwickelnder Methoden eine allgemeine Lösung $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Danach setzt man die gegebenen Anfangsbedingungen in die Lösung ein (das sind n Bedingungen); z.B. Funktionswerte an n verschiedenen Stellen $x_0, \dots, x_{n-1}$ oder an einer festen Stelle x_0 den Funktionswert und die $(n-1)$ ersten Ableitungswerte. Hiermit kann man die n Parameter aus der allgemeinen Lösung bestimmen, falls eine Lösung existiert. Wir werden später an einem Beispiel sehen, dass für bestimmte Anfangsbedingungen eine Lösung nicht notwendig existieren muss.*

Bevor wir mit den expliziten Lösungsmethoden beginnen, wollen wir eine der wichtigsten Fragen beantworten: Wann gibt es überhaupt eine Lösung eines AWP und ist die Lösung eindeutig oder nicht? Dazu notieren wir die folgenden Sätze über die Lösbarkeit von Differenzialgleichungen erster Ordnung. Da, wie wir später sehen werden, jede Dgl n-ter Ordnung äquivalent in ein System von Differenzialgleichungen umformen können, sind die folgenden Sätze auch darauf anwendbar.

Satz 1.1.1. *(Satz von Picard-Lindelöf) Gegeben ist eine Differenzialgleichung 1.Ordnung in expliziter Form*

$$y' = f(x, y)$$

mit den Anfangsdaten $(x_0.y_0) \in \mathbb{D}_f, y_0 = y(x_0)$. *Es existiere ein* $M > 0$, *so dass*

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| \leq M|\Delta y|$$

für alle Werte x, y *in einer Umgebung von* (x_0, y_0) *gilt. Man sagt, dass* f *dort einer (gleichmäß igen)* **Lipschitzbedingung** *genügt. Dies ist z.B. erfüllt, wenn* f *in einer Umgebung von* (x_0, y_0) *partiell nach* y *differenzierbar ist und die Ableitungen dort stetig sind.*
Dann gibt es ein offenes Intervall I *(mit* $x_0 \in I$*) und genau eine Lösung des AWP auf* I.

Wenn man die gleichmäß ige Lipschitzbedingung nicht verlangt, erhält man u.U. keine Eindeutigkeit der Lösung mehr.

Satz 1.1.2. *(Existenzsatz von Peano) Gegeben sei eine Differenzialgleichung 1.Ordnung in expliziter Form*

$$y' = f(x, y)$$

mit AW $y(x_0) = y_0$. *Ist* f *stetig, so existiert eine Lösung des AWP.*

Verallgemeinerung. Sei

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

mit Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Dann existiert eine eindeutige Lösung des AWP, wenn die partiellen Ableitungen $f_y, \ldots, f_{y^{(n-1)}}$ stetig sind.
Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass die Stetigkeit von f für die Eindeutigkeit der Lösung nicht ausreicht.

Beispiel 1.1.1. *Betr. Dgl*

$$y' = \sqrt{y}, \ \text{d.h. } f(x, y) = \sqrt{y}.$$

Definitionsbereich von f: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \times [0, \infty[$. *Es ist* $f_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, *also existiert eine Lösung auf* $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ *und sie ist stetig. Also gibt es nach Satz von Picard-Lindelöf zu jedem Anfangswert* $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $y_0 \in]0, \infty[$ *eine eindeutige Lösung. Wie sieht es für* $y_0 = 0$ *aus? (*$y_0 < 0$ *geht nicht!)*
Für y_0 *gibt es keine Lipschitzbedingung an* f.
1.Lösung. $y_1(x) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$, *also* $y_1(x_0) = y_0 = 0$ *ist Lösung von* $0 = y_1' = \sqrt{y_1} = 0$.

2.Lösung. Auch $y_2(x) = \frac{1}{4}(x-C)^2$ *ist Lösung für* $x \geq C$, *denn*

$$y_2'(x) = \frac{1}{2}(x-C) = \sqrt{\frac{1}{4}(x-C)^2} = \sqrt{y_2(x)}.$$

Also kann man beide Lösungen zusammenfassen. Für jedes $C \in \mathbb{R}$ *ist*

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < C \\ \frac{1}{4}(x-C)^2 & \text{falls } x \geq C \end{cases}$$

Lösung des AWP $y' = \sqrt{y}$ *mit* $y(x_0) = 0$ *falls* $x_0 \leq C$. *Damit hat man beliebig viele Lösungen des AWP.*
Für $y_0 > 0$ *ergibt sich:*

$$y_0 = \frac{1}{4}(x_0 - C)^2 \ \Rightarrow C = x_0 - 2\sqrt{y_0}$$

und damit die eindeutige Lösung

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < x_0 - 2\sqrt{y_0} \\ \frac{1}{4}(x - x_0 + 2\sqrt{y_0})^2 & \text{falls } x \geq x_0 - 2\sqrt{y_0} \end{cases}$$

In den nachfolgenden Abbildungen geben wir ein paar typische Lösungskurven an, die zu einem AWP gehören, dessen rechte Seite keiner lokalen Lipschitzbedingung genügt.
Typische Lösungskurven, wenn die Lipschitz-Bedingung nicht erfüllt ist:

1. Knotenpunkt ohne gemeinsame Tangente.

2. Knotenpunkt mit gemeinsamer Tangente.

3. Strudelpunkt mit asymptotischem Punkt der Lösungskurven.

Man kann in manchen Fällen für die Menge aller Lösungen einer gewöhnlichen Dgl. eine geschlossene Kurve finden, die beliebig nahe an Lösungen liegt und alle einschließ t, d.h. im Inneren der geschlossenen liegen alle Lösungen. So eine Kurve nennt man dann *Hüllkurve.*

Satz 1.1.3. *Besitzen die Lösungskurven einer Dgl eine Hüllkurve, so ist sie auch Lösung der Dgl. Ist ihre Lösung nicht aus der allgemeinen Lösung ersichtlich, so nennt man die Hüllkurve singuläre Lösung.*

1.1.1 Stabilität

Wir wollen noch einmal uns mit dem Konzept der Lösung einer Dgl. erster Ordnung $y' = f(x,y)$ befassen. Wie wir wissen, geht man zuerst von der stetigen Funktion $f : \mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ aus, wobei $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}^2$ maximaler Definitionsbereich von f ist. Eine Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist eine Lösung der Dgl., wenn für den Graphen von y, d.h. $\mathcal{G}_y :=$

$\{(x, y(x); x \in I\}$ gilt: $\mathcal{G}_y \subset D$ und für alle $x \in I$ folgt: $y'(x) = f(x, y(x))$. Nun ist es u.U. möglich ein Intervall, $\tilde{I} \supset I$ und eine Lösung $\tilde{y} : \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Dgl. zu finden mit $y(x) = \tilde{y}(x)$ für $x \in I$. Man nennt dann $\tilde{y}$ eine Fortsetzung von y und bezeichnet $\tilde{y} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine *maximal fortgesetzte Lösung* der Dgl., wenn für jede weitere Lösung $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ der Dgl. gilt

$$I \subset \tilde{I} \text{ und } y(x) = \tilde{y}(x) \text{ für alle } x \in I.$$

Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten
Gegeben sei eine autonome Differenzialgleichung (oder ein Differenzialgleichungssystem)

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.10}$$

wobei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld ist. Man betrachte das AWP (Anfangswertproblem)

$$x(0) = x_0$$

Es sei $x : I_x \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die eindeutige Lösung des AWP. Dann hängen die Lösungen auf einem beschränkten Intervall I, auf dem die Lösungen existieren, **stetig von den Anfangswerten** ab, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle Anfangswerte $y_0 \in U$ mit $|y_0 - x_0| < \delta$ und für die eindeutige Lösung $y : I_y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des AWP zu y_0 gilt:

$$|y(t) - x(t)| = |y(t) - x_0| < \epsilon, t \in I_x \cap I_y$$

Stabilität Hat man eine gewöhnliche autonome Differenzialgleichung (oder Differenzialgleichungssystem)

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.11}$$

gegeben, wobei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld ist, und betrachtet man das AWP (Anfangswertproblem)

$$x(0) = x_0$$

so stellt sich die Frage: Startet man nahe bei einem kritischen Punkt x_0 (d.h. $f(x_0) = 0$) mit einer anderen Lösung von (1.11), bleibt die Lösung nicht weit von der ersten Lösung entfernt? In einer formalen Definition für einen kritischen (oder stationären Punkt) lautet dies:

Definition 1.3. *(Stabilität). Gegeben sei die Dgl. (1.11) und es gelte $f(x_0) = 0$. Für die eindeutige Lösung $x : I_x \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des AWP gilt $x(t) = x_0$ für alle $t \in I_x$. Dann nennt man x_0 einen*

1. **stabilen Punkt**, *wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle Anfangswerte $y_0 \in U$ mit $|y_0 - x_0| < \delta$ und für die eindeutige Lösung $y : I_y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des AWP zu y_0 gilt:*

$$|y(t) - x(t)| = |y(t) - x_0| < \epsilon, t \in I_y$$

2. **attraktiven Punkt**, *wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle Anfangswerte $y_0 \in U$ mit $|y_0 - x_0| < \delta$ und für die eindeutige Lösung $y : I_y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des AWP zu y_0 gilt:*

$$[0, \infty[\subset I_y \text{ und } \lim_{t \to \infty} y(t) = x_0$$

3. **asymptotisch stabilen Punkt**, *wenn er stabil und attraktiv ist.*

4. **instabilen Punkt**, *wenn er nicht stabil ist.*

1.1.2 Erste numerische Lösungsverfahren

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt mit den analytischen Lösungen einer Differenzialgleichung erster Ordnung beschäftigen, wollen wir in diesem Abschnitt erste numerische Verfahren kennenlernen. Wir beginnen mit

Die Euler-Methode

Wir betrachten die allgemeine Form einer Dgl

$$y' = f(x, y), \;\; f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}, \;\; y(x_0) = y_0 \tag{1.12}$$

Man ist z.B. daran interessiert, den Wert einer L ösung $y : [x_0, \tilde{x}] \longrightarrow \mathbb{R}$ an einem Punkt $\tilde{x} \geq \tau > x_0$ zu approximieren. Das Intervall $[x_0, \tau]$ wird in so genannte *äquidistante* Teilintervalle der konstanten Länge $x_i - x_{i-1} = h$ $(i = \ldots, n)$ zerlegt, nämlich

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \tau$$

Dabei gilt die Beziehung zwischen der Anzahl der Zerlegung n und der Schrittweite $h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$:

$$h = \frac{\tau - x_0}{n} \tag{1.13}$$

oder äquivalent

$$x_i = x_{i-1} + h, \;\; i = 1, \ldots, n \;\; \Leftrightarrow \;\; x_i = x_0 + ih \tag{1.14}$$

Wir approximieren nun die Werte einer Lösung y an den Stellen $x = x_i$
Man starte mit $x = x_0$ und erhält wegen des AWP:

$$y(x_0) = y_0$$

Um den Wert $y(x_1)$ zu approximieren, setzen wir die Werte in die Dgl (1.70) ein:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

Angenommen die Ableitung auf dem Intervall $[x_0, x_1]$ wäre konstant, dann ergibt sichals Näherung y_1 von $y(x_1)$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \tag{1.15}$$

Eine analoge Überlegung führt zu

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \tag{1.16}$$

oder allgemein mittels rekursiver Formel

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ &= y_{i-1} + hf(x_0 + (i-1)h, y_{i-1}) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Dieses Verfahren ist allerdings nicht recht stabil. Im nächsten Abschnitt werden wir dazu Beispiele geben. Beseer ist das so genannte *implizite Euler-Verfahren*. Wir über nehmen die Bezeichung vom expliziten Verfahren, allerdings setzt man nun

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + hf(x_i, y_i) \\ &= y_{i-1} + hf(x_0 + ih, y_i) \end{aligned} \tag{1.18}$$

Der gesuchte Wert y_i ist durch (1.18) implizit gegeben und muss dann implizit berechnet werden, z.B. mit dem uns bekannten Newton-Raphson-Verfahren. Da man die Steigung "rückwärts" verwendet, wird das Verfahren auch *Rückwärts-Euler-Verfahren*. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$, also der 1.Ordnung. Aufgrund der Stabilitätseigenschaft gibt es keine Einchränkungen der Iterationsschritte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Dies macht die Mühe der Lösung nach Newton wieder wett.

Erweitertes Euler-Verfahren

Hier werden wir die äquivalente Darstellung einer gewöhnlichen Differenzialgleichung verwenden. Dazu - in der Übungsaufgabe 4 kann man sich davon überzeugen - notieren wir

> Eine Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung des AWP
>
> $$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$
>
> falls die Funktion die Integralgleichung
>
> $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{1.19}$$
>
> erfüllt.

Die Darstellung (1.19) lässt sich wie beim expliziten Eulerverfahren mittels der Iterationen zu einer gegebenen Zerlegung $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. umschreiben

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \text{ also allgemein} \\ y(x_i) &= y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(s, y(s))ds \end{aligned} \tag{1.20}$$

Die meisten numerischen Verfahren setzen nun an, das Integral "$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(s, y(s))ds$" möglichst effizient und genau zu bestimmen. Hier kommen wir mit den numerischen Integrationsverfahren in Kontakt, von denen es eine ganze Reihe gibt. Wir wollen drei herausgreifen:

1. (Rechtecksapproximation) Hier wird das Integral $A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(s, y(s))ds$ durch ein Rechteck approxiert, nämlich

   $$A_i \approx hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

   Eingesetzt in (1.20) liefert als Approximation bzw. Iteration

   $$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

   Dies ist nichts anderes als das explizite Euler-Verfahren.

2. (Trapezregel) Wir approximieren das Integral $A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(s, y(s))ds$ durch das Trapez (man beachte $h = x_i - x_{i-1}$ und konstant für die ganze Zerlegung).

   $$A_i \approx \frac{h}{2}\Big(f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + f(x_i, y(x_i))\Big) \tag{1.21}$$

   Nun ist uns ja $y(x)$ nicht bekannt, also müssen wir die Werte $y(x_{i-1})$ und $y(x_i)$ zuerst anderweitig ermitteln. Dabei ergibt sich als Näherung für $y(x_{i-1})$ aus der bereits getätigten Iteration gemäß (1.20). Eine Näherung für $y(x_i)$ ergibt sich aus dem expliziten Euler-Verfahren oder 1):

   $$y_i^* = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

   Setzt man dies dann in die Formel (1.22) ein, so erhält man als Iterationsformel

   $$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + \frac{h}{2}\Big(f(x_{i-1}, y_{i-1})) + f(x_i, y_i^*)\Big) \qquad (1.22) \\ y_i^* &= y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \end{aligned}$$

3. (Simpsonregel) Die Simpsonregel führt zum *Runge-Kutta-Verfahren*. Im nächsten Abschnitt, wenn wir etwas über die Konvergenz der Euler-Verfahren und deren Probleme betrachten, zeigt sich, dass die Ordnung des Runge-Kutta-Verfahren bei $\mathcal{O}(n^4)$ liegt. Die Idee ist, ein Polynom zweiten Grades durch je zwei Endpunkte x_{i-1} und x_i eines Teilintervalls zu legen. Dann wird die entsprechende Fläche integriert. Dazu braucht man noch einen dritten Punkt (Polynom zweiten Grades!). Dazu verwendet man $\hat{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$, den Mittelpunkt. Die Integration des entsprechenden Polynoms ergibt als Formel

   $$A_i \approx \frac{h}{6}\Big(f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 4f(\hat{x}_i, y(\hat{x}_i)) + f(x_i, y(x_i))\Big)$$

Die Werte $y(\hat{x}_i)$ und $y(x_i)$ sind beim i-ten Iterationsschritt noch nicht bekannt und müssen alternativ bestimmt werden Bei festenm i sei

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

Die Approximation $\hat{y}_i$ von $y(\hat{x}_i)$ wird mittels Schrittweite $\frac{h}{2}$ und dem erweiterten Eulerverfahren vorgenommen. Man erhält dann

$$\tilde{y}_i = y_{i-1} + \frac{hk_1}{2}$$

und damit als erste Näherung

$$k_2 = f(\hat{x}_i, \tilde{y}_i) = f\Big(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{hk_1}{2}\Big)$$

Hiermit bekommen eine bessere Näherung von $y(\hat{x}_i)$

$$\hat{y}_i = y_{i-1} + \frac{hk_2}{2}$$

Setzt man dies jetzt in f ein, erhält man eine bessere Approximation von $f(\hat{x}_i, y(\hat{x}_i))$:

$$k_3 = f(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = f\Big(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{hk_2}{2}\Big)$$

Damit folgt statt $f(\hat{x}_i, y(\hat{x}_i))$ als arithmetisches Mittel

$$4f(\hat{x}_i, y(\hat{x}_i)) \approx 2k_2 + 2k_3$$

Wir müssen noch eine Näherung von $f(x_i, y(x_i))$ finden. Dazu wählen wir eine erste Approximation von $y(x_i)$, in dem wir

$$y_i^* = y_{i-1} + hk_3$$

eine Eulerapproximation finden. Somit folgt

$$f(x_i, y(x_i)) \approx k_4 = f(x_i, y_i^*) = f(x_{i-1} + h, x_{i-1} + hk_3)$$

Wenn wir alles zusammenfassen, ergibt sich das Runge-Kutta-Schema:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{6}\Big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\Big), \tag{1.23}$$

wobei

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\
k_2 &= f\Big(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{hk_1}{2}\Big) \\
k_3 &= f\Big(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{hk_2}{2}\Big) \\
k_4 &= f(x_{i-1} + h, x_{i-1} + hk_3)
\end{aligned}$$

1.1.3 Verfolgungskurven

Bereits im Kapitel "Kurven" haben wir uns mit den Verfolgungskurven beschäftigt. Dabei haben wir die Herleitung und Lösung der Kurven auf dieses Kapitel verschoben, da es hier seinen berechtigten Platz hat. Dabei wollen wir hier die so genannte *Hundekurve* herleiten. Dabei gehen wir von dem folgenden Bild aus:
Sein Herrchen (bez. M) bewegt sich auf der x-Achse vom Punkt $(0,0)$ mit konstanter Geschwindigkeit v_M aus. Der Hund befindet sich in $(0,a)$ und läuft mit der Geschwindigkeit $v_H > v_M$ immer auf sein Herrchen zu.
Dann setze man $k = \frac{v_H}{v_M}$. Aus der Abbildung sieht man (der Hund läuft in Richtung des Herrchens):

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x_M - x_H} = -\frac{y(x)}{v_M \cdot t - x} \tag{1.24}$$

wobei t die verstrichene Zeit darstellt und x der Ort des Hundes. Also folgt

$$\frac{y(x)}{y'(x)} = x - v_M \cdot t \tag{1.25}$$

Wir leiten dies noch einmal nach x ab (Quotientenregel):

$$\frac{(y'(x))^2 - y(x)y''(x)}{y'(x)^2} = 1 - v_M \cdot \frac{dt}{dx} \tag{1.26}$$

dabei betrachten wir die Zeit als Funktion des Ortes x. Auš erdem lässt sich die Geschwindigkeit des Hundes folgendermaš en darstellen

$$\left(\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2\right) = v_H^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2\right)} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + y'(x)^2} = v_H$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v_H} \tag{1.27}$$

Eingesetzt in (1.26) liefert dies

$$\frac{y'(x)^2 - y(x)y''(x)}{y'(x)^2} = 1 - v_M \cdot \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v_H} \quad \Rightarrow \quad y''(x) = \frac{y'(x)^2\sqrt{1 + y'(x)^2}}{ky} \tag{1.28}$$

Da diese Gleichung komplizierter und nicht eindeutig lösbar ist, lösen wir nach x auf, d.h. wir betrachten x als Funktion von y und erhalten mit der Ableitung der Umkehrfunktion die Darstellung:

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} \quad \Rightarrow \quad y''(x) = -\frac{x''(y)}{x'(y)^3}$$

(dabei beachte man, dass mit $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$ nach differenziert werden muss). Einsetzen in (1.28) und nach $x''(y)$ auflösen liefert

$$x''(y) = -\frac{x'(y)^2\sqrt{1 + x'(y)^2}}{ky} \tag{1.29}$$

Im dritten Abschnitt werden wir eine Lösung herleiten.

1.1.4 Übung

1. Gegeben sei das AWP
$$y' = x + y, \; y(0) = 0.$$
Sind die Voraussetzungen des Satzes Picard-Lindelöf erfüllt (mit Begründung)?

2. Genügt $f(x, y) = e^{-x} \ln(xy), \; x > 0, y > 1$ global einer Lipschitzbedinguing in y? Was bedeutet dies für ein AWP $y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_=, \; x_0 > 0, y > 1$?

3. Auf $G = [0, \infty[\times[0, \infty[$ sei die Dgl.
$$y' = y^{\frac{5}{7}} \text{ gegeben.}$$
Geht durch jeden Punkt von G genau eine maximal fortgesetzte Lösung der Dgl.? Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen.

4. Zeigen Sie: Eine Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$ ist genau dann eine Lösung des AWP $y' = f(x, y)$ mit $y_0 = y(x_0)$, wenn y die Integralgleichung
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \tag{1.30}$$
erfüllt

5. Aus (1.30) lässt sich eine numerische Methode zur Bestimmung einer approximativen Lösung herleiten: Um eine näherungsweise Lösung der Dgl. zu finden, muss man eine numerische Lösung des Integrals
$$\int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$$
finden. Dazu suche man bestimmte Verfahren dieses Integral zu berechnen.

6. Man betrachte eine Telefonleitung, die eine gleichmäš ige Dichte δ besitzt und zwischen zwei Punkten durchhängt. Dabei nehmen wir an, dass der tiefste Punkt A auf der $y-$Achse liegt. Dort wirkt nur eine horizontale Kraft T_0 ein, da sich das Kabel im Gleichgewicht befindet. An einem Punkt P auf dem Kabel wirkt die Kraft T an, die tangential zum Kabel wirkt (Zugkraft). Schlieš lich wirkt noch die Schwerkraft auf das Seil. DaS es keine horizontale Bewegung gibt, muss die horizontale Komponente von T mit T_0 identisch sein. Also
$$|T| \cos\theta = |T_0|$$

Dabei ist θ der Tangentenwinkel an das Kabel im Punkt P. Da sich das Seil nicht vertikal bewegt, muss die vertikale Komponente von T das Gewicht des Kabels von A bis P ausgleichen. Ist nun s die Länge des Stück Kabels von A bis P, so gilt

$$|T| \sin\theta = \delta s$$

(a) Drücken Sie die Steigung $\frac{dy}{dx}$ des Kabels in P durch eine Funktion von s aus.

(b) Man differenziere nun diesen Ausdruck nach x, damit man $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch $\frac{ds}{dx}$ ausdrücken kann.

(c) Es ist $ds = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2}$. Damit kann man einen Ausdruck $\frac{ds}{dx}$ erhalten und ihn in b) einsetzen. Somit bekommt man eine Differenzialgleichung 2.Ordnung von y als Funktion von x.

(d) Man setze $u = \frac{dy}{dx}$ und schreibe die gefundene Differenzialgleichung in c) in eine 1. Ordnung von u um.

1.2 Differenzialgleichungen 1.Ordnung

In diesem Abschnitt beginnen wir mit einer Untersuchung von gewöhnlichen Dgl. erster Ordnung. Dazu betrachten wir die explizite Form

$$y' = f(x, y) \text{ auf } \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2.$$

f erfülle eine Lipschitzbedingung, wodurch die eindeutige Lösbarkeit des AWP gewährleistet ist. Für jeden Punkt $(x.y) \in \mathbb{D}$ gibt $f(x, y)$ die Steigung der Lösung an, die durch den Punkt (x, y) geht. Der Punkt mit Steigung wird *Linienelement* genannt. Mit geeignet vielen Linienelementen erhält man auf $\mathbb{D}$ ein *Richtungsfeld.*

Isoklinenverfahren. Wir bestimmen den Ort mit der gleichen Steigung, also mit der gleichen Steigung der Linienelemente. Dabei setzt man für eine Steigung k

$$k = y' = f(x, y)$$

und löst die Gleichung, falls möglich, nach y auf. Die Höhenlinien von f nennt man auch *Isoklinen.*

Dazu wollen wir ein Beispiel rechnen.

Beispiel 1.2.1. *Betr. die Dgl*

$$xy' + y = 0 \textit{ implizite Darstellung; für } x \neq 0 \;\Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

Alle Isoklinen gehen durch den Ursprung; dort gibt es allerdings verschiedene Steigungen, was nicht verwunderlich ist, weil dort die rechte Seite keiner Lipschitzbedingung genügt. Die Linienelemente ergeben

$$xy = c$$

Damit erhalten wir als Lösungen Hyperbeln, aber auch $y = 0$ ist Lösung.

Relativ schnell erkennt man die Gültigkeit des folgenden Satzes: Ist eine Isokline mit Wert k eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung k, so kann man durch die Vorschrift der Dgl. diese nicht mehr verlassen (Lösung hat auch die Steigung k). Also gilt

Satz 1.2.1. *Ist die Isokline zur Linienelementsteigung k eine Gerade mit Steigung k, so ist sie auch eine spezielle Lösung der Dgl.*

Wir betrachten nun Kurven in $\mathbb{R}^2$, die implizit gegeben sind durch die Vorschrift $F(x, y, C) = 0$ mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Die Kurven unterscheiden sich nur durch verschiedenen Parameter C. Man möchte eine Gleichung ohne C erstellen. Damit erhält man eine Dgl der Kurvenschar. Kann man $F(x, y, C) = 0$ in der Form $g(x, y) = h(C)$ auflösen und nimmt an, dass die Kurve eine Funktion von $y(x)$ ist, so kann man nach x differenzieren und bekommt auf der rechten Seite nach dem Ableiten "0" und damit

$$\frac{dg}{dx}(x, y(x)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0.$$

Wir wollen dies an einigen Beispielen erläutern.

Beispiel 1.2.2. 1. *Aus der Kurvenschar*

$$xy^2 + x^2y = C^2 \quad \text{ergibt sich die Dgl. } y^2 + 2xyy' + 2xy + x^2yy' = 0$$

2. *Wählt man die Kurvenschar (konzentrische Kreise um den Ursprung)*

$$x^2 + y^2 = C^2 \;\Rightarrow\; 2x + 2yy' = 0$$

3. *Für die Parabelschar*

$$y = Cx^2 \;\Rightarrow\; y' = 2Cx$$

4. *Man kann die Dgl*

$$xy' + y = 0 \;\Rightarrow\; \text{mit dem Isoklinenverfahren lösen und erhält die Lösungsschar}$$

$$xy = C, \text{ denn daraus folgt } y + xy' = 0$$

Mit Hilfe der Umwandlung von Kurvenscharen in eine Dgl. kann man geometrisch einige Aussagen treffen. Eine davon stellen wir jetzt vor.
Man nennt allgemein Kurven, die die Kurven einer gegebenen Schar rechtwinklig schneiden *Orthogonaltrajektorien*. Ist

$$y' = f(x, y)$$

eine vorgegebene Dgl, so schneiden die Lösungen der neuen Dgl.

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

die Lösungen der ersten im rechten Winkel.

Beispiel 1.2.3. *Gegeben sei die Ellipsenschar*

$$\frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{C} = 1,\ C > 0 \ \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 2C \ \Rightarrow 2x + 4yy' = 0 \ \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{x}{2y}\ (y \neq 0)$$

Die Dgl. der Orthogonaltrajektorien lautet

$$y' = \frac{2y}{x}$$

dessen Lösungen die Form

$$y = Cx^2 \text{ also einer Parabelschar}$$

haben.

1.2.1 Typen von Dgl

Wir werden im Folgenden verschiedene Typen von rechten Seiten und damit verschiedene Typen von gewöhnlichen Dgl. betrachten. Man wird sehen, dass für die meisten immer eine eigene Lösungstheorie erarbeitet werden muss.

Typ 1 -Trennbare Variable

Wir gehen von einer explizite Dgl der Form:

$$y' = g(x)h(y),\ h(y) \neq 0$$

mit stetigen Funktionen g, h aus. Dann schreiben wir $y' = \frac{dy}{dx}$ und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \ \Rightarrow \ \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

Man integriere beide Seiten und folgert

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

Sind $G(x)$ bzw. $H(y)$ Stammfunktionen von g bzw. $\frac{1}{h}$ so tauchen zwei Konstanten auf,

$$H(y) + C_1 = G(x) + C_2$$

die man zu einer zusammenfasst $C = C_2 - C_1$

$$H(y) = G(x) + C$$

Kann man nun nach y auflösen, so erhält man die allgemeine Lösung in expliziter Form. Ansonsten muss man bei der impliziten bleiben.

Beispiel 1.2.4. *1.*

$$xy' + y = 0,\ \text{falls } x \neq 0\ \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}\ \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}\ \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C^*\ \Rightarrow \ln|xy| = C^*\ \Rightarrow\ |xy| = e^{C^*}$$

also gleiches Vorzeichen für x und y ergibt als Lösungskurven

$$xy = C \text{ sonst } xy = -C,\ \text{für } C > 0.$$

Somit ergibt sich eine Hyperbelschar als Lösungen

$$y = \frac{C}{x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Es ist auch $y = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ ein Lösung.

2.

$$4yy' + x = 0\ \Rightarrow\ 4ydy = -xdx$$

$$\Rightarrow\ 2y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C\ \Rightarrow\ 2y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C \overset{C \geq 0}{\Rightarrow} \frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}C} = 1$$

Also erhält man eine Ellipsenschar mit Halbachsen $\sqrt{2C}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}C}$.

3. Entleeren eines kugelförmigen Behälters

- *Querschnittsfläche der Öffnung: F*
- *Austrittsgeschwindigkeit: $v(t)$ zur Zeit t*
- *Radius des Behälters R*
- *Höhe des Wasserstandes zur Zeit t: $h(t)$*
- *Radius der Wasseroberfläche zur Zeit t: $r(t)$*

Es gilt $h(0) = 2R$. Das ausgelaufene Volumen ist eine Funktion der Höhe, also $V = V(h)$. Also gilt (wir vernachlässigen das Zeitargument):

$$\Delta V = \pi r^2(-\Delta h) = \pi\Big(R^2 - (h-R)^2\Big)(-\Delta h) = \pi\Big(2Rh - h^2\Big)(-\Delta h)$$

und mit dem Bernoullischen Gesetz $v \approx \sqrt{2gh}$

$$\Delta V = Fv\Delta t \approx F\sqrt{2gh}\Delta t$$

($v\Delta t$ ist die in Δt ausgelaufene Wassersäule). Für kleines Δt habe wir "=" und wir rechnen um:

$$\begin{aligned}
\pi\Big(2Rh - h^2\Big)(-\Delta h) &\approx F\sqrt{2gh}\Delta t \;\Leftrightarrow \\
\Big(2Rh^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\Big)(-\frac{\Delta h}{\Delta t}) &\approx \frac{F}{\pi}\sqrt{2g} \text{ mit } \Delta t \to 0 \text{ folgt} \\
\Big(2Rh^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\Big)(-\dot{h}) &= \frac{F}{\pi}\sqrt{2g} \Leftrightarrow \\
\Big(-2Rh^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{3}{2}}\Big)\dot{h} &= \frac{F}{\pi}\sqrt{2g}
\end{aligned}$$

Damit liegt eine Dgl. mit trennbaren Variablen vor, und und wir lösen sie, in dem wir als Konstante $K = \frac{F}{\pi}\sqrt{2g}$ setzen. Nach der Methode folgt (Trennung und anschlieš endes Integrieren):

$$Kt + C = \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}Rh^{\frac{3}{2}} = h^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{5}h - \frac{4}{3}R)$$

Wir bestimmen die Konstante mit $h(0) = 2R$ also $C = -(2R)^{\frac{3}{2}}\frac{8}{15}R = -\frac{8}{15}\sqrt{8}R^{\frac{5}{2}}$. Somit erhalten wir durch die Festlegung $h(T) = 0$ die Zeit bis zum gesamten Auslaufen des Wassers:

$$T = \frac{1}{K}\frac{8}{15}\sqrt{8}R^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\frac{R^{\frac{5}{2}}\pi}{F\sqrt{g}}$$

Hier sieht man, dass die Gröš e der Kugel bei gleich groš er Öffnung zu längerer Auslaufzeit bzw. bei gleicher Gröš e der Kugel aber gröš erer Öffnung zu schnellerem Auslaufen führt. Andere Variablen gehen in der Zeitberechnung nicht ein, was auch der Erfahrung entspricht. Die Auslaufgeschwindigkeit wurde bekanntlich nur von Wasserhöhe und der Gravitationskonstanten abhängig gemacht.

Typ 2 - Substitution

Allgemein sind hier Dgl'en der Art

$$y' = f\Big(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\Big)$$

Gegenstand der Untersuchung. Allerdings kann der allgemeine Fall nicht insgesamt betrachtet werden. Deshalb geht man zu Sonderfällen über.
Fall A)

$$y' = f(\frac{y}{x}).$$

Wir substituieren:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \;\Rightarrow\; y = ux \text{ und } y' = \frac{du}{dx}x + u$$

In die Dgl. einsetzen, liefert dies:

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u) \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

Man erhält somit getrennte Variable und integriert

$$\int \frac{1}{f(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Die Lösung ergibt sich aus der Rücksubstitution.
Fall B)

$$y' = f(ax + by + c)$$

Dann substituiert man

$$u = ax + by + c \;\Rightarrow by' = \frac{du}{dx} - a \;\Rightarrow bf(u) = \frac{du}{dx} - a \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = bf(u) + a \;\Rightarrow$$

und folgert erneut mit den getrennten Variablen

$$\int \frac{1}{bf(u) + a} du = \int dx.$$

Wieder mit Rücksubstitution ergibt sich die Lösung.

Beispiel 1.2.5. *1.* $y' = (x + y - 1)^2 \;\Rightarrow$ *Typ (B), also Substitution*

$$u = x+y-1 \;\Rightarrow\; y' = \frac{du}{dx} - 1 = u^2 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 1+u^2 \;\Rightarrow\; \int \frac{du}{1+u^2} = \int dx \;\Rightarrow\; \arctan u = x+C \;\Rightarrow$$

$u = \tan(x + C)$ *Vorsicht bei Umkehrfunktion, nur dort, wo Definition möglich ist!*

Rücksubstitution liefert

$$y(x) = 1 - x + \tan(x + C)$$

2.

$$y' = \frac{y + x}{x - y} \;\Rightarrow\; y' = \frac{\frac{y}{x} + 1}{1 - \frac{y}{x}}$$

Also Typ (A), mit $u = \frac{y}{x}$.

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{u + 1}{1 - u} \;\Rightarrow\; \frac{u + 1}{1 - u} - u = \frac{1 + u^2}{1 - u} \;\Rightarrow$$

$$\int \frac{1 - u}{1 + u^2} du = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln(|x|) + C \;\Rightarrow$$

$$\arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln(1 + (\frac{y}{x})^2) = \ln|x| + C \;\Rightarrow\; \arctan \frac{y}{x} = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + C$$

Wir formulieren in Polarkoordinaten um:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \ \Rightarrow\ \frac{y}{x} = \tan\varphi \ \textit{und}\ r = \sqrt{x^2+y^2} \ \Rightarrow$$

$$\arctan(\tan\varphi) = \ln r + C \ \Leftrightarrow\ \varphi = \ln r + C \ \Leftrightarrow r = e^{\varphi - C}$$

Diese Kurve kennen wir bereits aus dem ersten Kapitel über Kurven im $\mathbb{R}^2$, es ist die "Logarithmische Spirale"

Typ 3 - Lineare Differenzialgleichung

Hier haben wir es mit dem Klassiker der gewöhnlichen Dgl. zu tun. Wir gehen von der Form

$$y' + g(x)y = s(x)$$

aus. Sie ist für $s = 0$ linear in y, weil es nur eine Kombination Addition und skalarer (mit $g(x)$) Multiplikation im Argument "y" ist; alternative Schreibweisen lauten:

$$\begin{aligned} h(x)y' + \tilde{g}(x)y &= \tilde{s}(x) \\ y' + \frac{\tilde{g}(x)}{h(x)}y &= \frac{\tilde{s}(x)}{h(x)} \end{aligned}$$

Man nennt s eine "Störfunktion";
Gilt $s(x) = 0$ für alle x, so nennt man die lineare Dgl *homogen*, sonst *inhomogen*. Wir betrachten zuerst den homogenen Fall:

$$y_h' + g(x)y_h = 0 \ \Rightarrow\ y_h' = -g(x)y_h \ \text{Typ getrennte Variable} \ \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int g(x)dx$$

Ist G eine Stammfunktion von g, so folgt:

$$\ln|y_h| = -G(x) + C^* \ \Rightarrow \ \text{ für } C = \pm e^{C^*},\ \text{oder } C = 0 \text{ ergibt sich:}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y_h = Ce^{-G(x)}.$$

Wir betrachten jetzt die inhomogene lineare Dgl.

$$y' + g(x)y = s(x)$$

und bestimmen die Lösung mittels *Variation der Konstanten*. Wir erinnern an die obige Lösung der homogenen Dgl und setzen an

$$y(x) = V(x)e^{-G(x)}$$

wobei V eine noch zu bestimmende Funktion ist. Ableiten ergibt:

$$y' = V'e^{-G(x)} - Vg(x)e^{-G(x)}$$

Einsetzen in die inhomogene lineare Dgl liefert

$$V'(x)e^{-G(x)} - \underbrace{V(x)g(x)e^{-G(x)} + g(x)V(x)e^{-G(x)}}_{=0} = s(x) \;\Leftrightarrow$$

$$V'(x) = s(x)e^{G(x)}.$$

Also

$$V(x) = \int s(x)e^{G(x)}dx.$$

Stellt $I(x)$ eine Stammfunktion von $s(x)e^{G(x)}$ dar, so ist

$$V(x) = I(x) + C$$

Somit folgt für die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Dgl.:

$$y(x) = \big(I(x) + C\big)e^{-G(x)} \tag{1.31}$$

oder anders geschrieben

$$y(x) = Ce^{-G(x)} + I(x)e^{-G(x)} \tag{1.32}$$

Die Lösung in (1.32) kann man folgendermaßen darstellen:
$y(x)$ = allgemeine Lösung der homogenen linearen Dgl. $(Ce^{-G(x)})$+ spezielle Lösung der inhomogenen linearen Dgl

Beispiel 1.2.6. *1. Wir untersuchen die inhomogene lineare Dgl $xy' - y = x^2$ und bringen sie auf die Standardform $y' - \frac{1}{x}y = x$. Wir erhalten die homogene lineare Dgl.,*

$$y_h' - \frac{1}{x}y_h = 0$$

und lösen diese

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|y_h| = \ln|x| + C^* \;\Rightarrow\; y_h = Cx.$$

Mit der Variation der Konstanten folgt:

$$y = V(x)x \;\Rightarrow\; y'(x) = V'(x)x + V(x) \;\Rightarrow V' = 1 \;\Rightarrow V(x) = x + C$$

Und als allgemeine Lösung ergibt sich

$$y(x) = (x + C)x = Cx + x^2.$$

Ein alternativer Weg lässt sich mittels Substitutionsmethode gewinnen:

$$y' = \frac{y}{x} + x \;\Rightarrow\; u = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = ux \;\Rightarrow$$

$$u'x + u = y' = u + x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \;\Rightarrow$$

$$u(x) = x + C \;\Rightarrow\; y = x^2 + Cx$$

2. *Hier haben wir die inhomogene lineare Dgl* $xy' = x + 2y$

   (a) *Als allgemeine Lösung ergibt sich*

   $$y' = 1 + \frac{2}{x}y \;\Rightarrow\; y' - \frac{2}{x}y = 1$$

   $y_h' - \frac{2}{x}y_h = 0$ *ist die zugehörige homogene lineare Dgl, die als Lösung*

   $$\int \frac{dy_h}{y_h} = 2\int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|y_h| = 2\ln|x| + C^* \;\Rightarrow\; y_h = Cx^2 \text{ ergibt.}$$

   Die Variation der Konstanten liefert

   $$V = \int 1 \cdot e^{-2\ln|x|}dx = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C^*$$

   Also

   $$y(x) = Cx^2 + (-\frac{1}{x})e^{\ln(x^2)} = Cx^2 - x$$

   In Fall $C \neq 0$ *sind die Lösungen Parabeln, für* $C > 0$ *sind sie nach oben offen, für* $C < 0$ *nach unten offen; Schnittpunkt mit der* x*-Achse:* $(0,0)$ *und* $(\frac{1}{C}, 0)$. *Scheitel:* $2Cx - 1 = 0 \;\Rightarrow$ *also liest sich der Scheitelpunkt als* $(\frac{1}{2C}, -\frac{1}{4C})$.

   (b) $C = 0 \;\Rightarrow\; y = -x \;\Rightarrow$ *Isokline für* $k = -1$ *ist bereits Lösung.*

   (c) *Spezielle Lösungen:*

   i. $x_0 = 1,\; y_0 = 5 \;\Rightarrow\; 5 = C - 1 \;\Rightarrow\; C = 6 \;\Rightarrow y = 6x^2 - x$ *ist spezielle Lösung.*

   ii. $x_0 = 0,\; y_0 = -2 \;\Rightarrow\; -2 = 0$ *nicht erfüllbar.*

   iii. $x_0 = 0,\; y_0 = 0 \;\Rightarrow\; 0 = c \cdot 0 - 0 \;\Rightarrow$ *wird von allen Lösungen erfüllt, also gibt es hier keine eindeutige Lösung.*

3. *Radiaktiver Zerfall*

   Wir betrachten ein radioaktives Material einer bestimmten Masse. Mit $y(t)$ *bezeichnen wir die noch* **nicht** *zerfallene Masse. Nach dem Zerfallsgesetz gilt:*

> *Die Abnahme der noch nicht zerfallenen Masse pro Zeiteinheit* Δt
> $\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$ *ist proportional zur noch nicht zerfallenen Masse.*

Beim Grenzübergang $\Delta t \to 0$ *erhalten wir also*

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t) \;\Leftrightarrow\; \dot{y}(t) + \lambda y(t) = 0$$

wobei $\lambda > 0$ *die zeitunabhängige Zerfallskonstante ist (das negative Vorzeichnen rührt von der Abnahme her). Somit haben wir eine einfache lineare homogene Differenzialgleichung vor uns, deren Lösung wir aus der Formel sofort ablesen können:*

$$y(t) = Ce^{-\lambda t}$$

wobei $y(0) = C$ *die zu Beginn der Beobachtung noch nicht zerfallene Masse darstellt. Also*

$$y(t) = y(0)e^{-\lambda t}$$

Die bekannte Halbwertzeit T *ist durch* $y(T) = \frac{1}{2}y(0)$ *definiert. Einsetzen ergibt dann*

$$\frac{1}{2}y(0) = y(0)e^{-\lambda T} \;\Leftrightarrow\; T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.6931471813}{\lambda}$$

1.2.2 Spezielle Differenzialgleichungen

Die folgenden beiden Typen von Differenzialgleichungen lassen sich auf lineare durch geeignete Substitution überführen. Daher führen wir diese noch an. Am Schluss des gesamten Kapitels werden wir noch einige weitere erwähnen, die sich nicht mit den gängigen Methoden lösen lassen bzw. deren Lösungen zu einer Definition bestimmter Funktionen führen.

Differenzialgleichung vom Typ Bernoulli

Zu einem $r \in \mathbb{R}, r \notin \{0, 1\}$ betrachten wir die Differenzialgleichung

$$y' = f(x)y + g(x)y^r \tag{1.33}$$

wobei $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Wir haben $r \neq 0, 1$ vorausgesetzt, weil wir sonst eine lineare Differenzialgleichung vor uns haben. Zur Lösung substituieren wir

$$u = y^{1-r}$$

dann erhalten wir als Differenzialgleichung

$$u' = (1-r)f(x)u + (1-r)g(x) \tag{1.34}$$

Somit ist (1.34) eine lineare Dgl., die eine globale Lösung erlaubt, also eine auf ganz $I \subset \mathbb{R}$ existierende Lösung, abhängig von den Funktionen f, g. Eine Lösung von (1.33) ergibt sich dann mit $y = u^{\frac{1}{1-r}}$. Deshalb brauchen wir eine spezielle Theorie hierfür nicht entwickeln. Wir müssen nur die einzelne Fälle von r kurz untersuchen. Zuerst erkennt man, dass nur positive Lösungen y durch diesen Ansatz erreicht werden.

1. Ist $r > 0$, so ist auch $y = 0$ eine Lösung.

2. Ist $r \in \mathbb{Z}, r < 0$, so erhalten wir auch negative Lösungen, nämlich für r gerade. Ist $1-r$ ungerade und setzt man $y = u^{\frac{1}{1-r}}$, so ist dies auch für $u < 0$ definiert. Andererseits ist für r ungerade, somit ergibt sich mit y auch durch $-y$ eine Lösung. Es hängt dann vom Anfangswert ab, ob die Lösung eindeutig ist oder nicht.

3. Für $r < 0$ und $r \notin \mathbb{Z}$ ist mit der Methode keine Aussage möglich.

Falls man ein AWP vor sich hat, so kann man einerseits den Anfangswert mitsubsituieren und entsprechend die lineare Dgl lösen. Oder man setzt allgemein eine Konstante C ein und errechnet dann durch Einsetzen die spezielle Lösung. Zu $y(x_0) = 0$ ist stets $y = 0$ eine Lösung.

Beispiel 1.2.7. *1. Wir betrachten das AWP*

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \ y(1) = 1. \tag{1.35}$$

Man erkennt, dass hier $r = -1$ ist. Also Substituieren wir

$$u(x) = y^2(x) \Leftrightarrow y(x) = \sqrt{u(x)}$$

Dabei beachte man, dass der Anfangswert positiv gewählt wurde. Weiter haben wir nach der Kettenregel

$$y'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{u'(x)}{2y(x)} \Leftrightarrow u'(x) = y'(x) \cdot 2y(x)$$

Eingesetzt erhalten wir die lineare Dgl.

$$u'(x) = \frac{2}{x}u(x) + 2x \tag{1.36}$$

Dies ist eine lineare Dgl. mit $g(x) = -\frac{2}{x}$ und $s(x) = 2x$ in der Notation der lin. Dgl. Wenn man nun die Lösungsmethode für die lineare Dgl. verwendet, so folgt als allgemeine Lösung von (1.36)

$$u(x) = cx^2 + 2x^2 \ln x$$

Zurüktransformiert liefert es als allgemeine Lösung für y

$$y(x) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2(2\ln x + c)} \tag{1.37}$$

Zur Bestimmung von c berechnen wir

$$1 = y(1) = \sqrt{1^2(2 \cdot 0 + c)} = \sqrt{c}$$

Also $c = 1$. Und die Lösung des AWP lautet

$$y(x) = \sqrt{x^2(2\ln x + 1)}$$

.

2. *Nun betrachten wir die Dgl.*

$$y'(x) = \sin(x)y(x) + \sin(x)y^2(x) \tag{1.38}$$

Hier ist $r = 2$ und als Substituion wählt man

$$u(x) = \frac{1}{y(x)} \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{u(x)}$$

Damit folgt

$$y'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} \Leftrightarrow \; u'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}$$

Eingesetzt in die Bernoulli-Dgl (1.39) folgt

$$u'(x) = -\sin(x)u(x) - \sin(x) \Leftrightarrow u'(x) + \sin(x)u(x) = -\sin(x) \tag{1.39}$$

Diese inhomogene lineare Differenzialgleichung hat als Lösung gemäš (1.31):

$$u(x) = \left(-e^{-\cos(x)} + C\right)e^{\cos(x)} = -1 + Ce^{\cos(x)}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{\cos(x)} - 1}$$

Differenzialgleichung vom Typ Riccati

Riccati Differenzialgleichung ist eine spezielle Bernoulli-Gleichung mit inhomogenem Anteil. Sie kommen in vielfältigen Anwendungen vor. Eine der Hauptanwendungsgebieten in letzter Zeit findet man in den Lösungskurven von Zinskurvenmodellen - den so genannten Affinen Modellen. Die allgemeine Form der Riccati- Differenzialgleichung lautet:

$$y' = f(x)y + g(x)y^2 + h(x) \tag{1.40}$$

mit stetigen $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Aufgrund des inhomogenen Terms h kann man es nicht in eine lineare Dgl transformieren. Deshalb muss man zuerst eine Lösung z "erraten" oder durch einen Ansatz finden. Nun erhält man eine weitere Lösung durch den Ansatz

$$y = z + \frac{1}{u}$$

wobei u die Dgl

$$u' = -(2zg + f)u - g \tag{1.41}$$

löst, was eine inhomogene lineare Dgl. darstellt.

Beispiel 1.2.8. *1. Wir betrachten das AWP*

$$y' - \frac{3}{x}y + y^2 = -\frac{3}{x^2},\ y(2) = \frac{7}{6} \tag{1.42}$$

- *Zum Auffinden einer speziellen Lösung kann man einfach einen ersten Ansatz $y = C \cdot x^m$ wählen und einsetzen:*

$$Cmx^{m-1} - 3Cx^{m-1} + C^2x^{2m} = -3x^{-2}$$

Damit sich "x" herauskürzt muss $m - 1 = 2m = -2$ gelten, was in der Tat für $m = -1$ erfüllt ist. Dann folgt $-C - 3C + C^2 = -3 \Leftrightarrow (C-2)^2 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1$ oder $C_2 = 3$. Als spezielle Lösung haben wir also $z = \frac{1}{x}$

- *Wenn wir es in die Form (1.40) bringen, erkennen wir: $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = -1$ und $h(x) = -\frac{3}{x^2}$. Setzen wir das nun in die transformierte Gleichung (1.41) ein, so erhalten wir mit $z = \frac{1}{x}$*

$$u' = -\Big(2\frac{1}{x}(-1) + \frac{3}{x}\Big)u - (-1) \ \Leftrightarrow\ u' = -\frac{1}{x}u + 1$$

Dies ist eine lineare inhomogene Dgl, deren allgemeine Lösung (nach den obigen Techniken) lautet (als Übung für den Leser!)

$$u(x) = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}$$

Somit haben wir für die Lösung der Riccati-Dgl:

$$y(x) = \frac{1}{x} \text{ oder als weitere Lösung } y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{C}{x} + \frac{x}{2}} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 2C} \tag{1.43}$$

Nun wollen wir die Lösung zum AWP $y(2) = \frac{1}{2}$ finden. Dies erfüllt bereits die spezielle Lösung $z(x) = \frac{1}{x}$. Wir hätten also hier bereits aufhören können.

Wenn man einen alternativen Wert $y(2) = \frac{7}{6}$ wählt, so setzt man in (1.43) ein und errechnet

$$\frac{7}{6} = \frac{1}{2} + \frac{4}{4+2C} \ \Leftrightarrow\ C = 1$$

Also als Lösung dieses AWP

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 2}$$

2. Hier wählen wir

$$y' - y - e^{-x}y^2 = -e^x \tag{1.44}$$

- *Wir wollen eine spezielle Lösung finden. Wir haben als Koeffizientenfunktionen die Exponentialfunktion - also versuchen wir den Ansatz*

$$y(x) = ae^{bx}$$

und setzen diesen in die Dgl ein

$$abe^{bx} - ae^{bx} - a^2e^{2bx-x} = -e^x$$

Auch hier muss wieder, um die Funktionen kürzen zu können, die Exponenten gleich sein:

$$b = 2b - 1 = 1 \;\Leftrightarrow\; b = 1$$

Dann folgt

$$a - a - a^2 = -1 \;\Leftrightarrow\; a = \pm 1$$

Damit haben wir eine spezielle Lösung $z(x) = e^x$.

- *Aus der allgemeinen Form der Riccati-Dgl. (1.40) sehen wir $f(x) = 1$, $g(x) = e^{-x}$ und $h(x) = -e^x$. In die transformierte Gleichung eingesetzt, folgt mit $z(x) = e^x$*

$$u' = -(2e^xe^{-x} + 1)u - e^{-x} \Leftrightarrow u' = -3u - e^{-x}$$

Als allgemeine Lösung dieser linearen inhomogenen Dgl . erhalten wir

$$u(x) = Ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}$$

Somit haben wir als Lösung von (1.44)

$$y(x) = e^x \text{ oder } y(x) = e^x + \frac{1}{Ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}} = e^x\frac{e^3x}{C - \frac{1}{2}e^{2x}}$$

Setzen wir $C = 0$, so haben wir die andere spezielle Lösung gefunden, nämlich für $a = -1$ (siehe obigen Ansatz).

1.2.3 Typ 4 - Exakte Differenzialgleichungen

Wir wählen ein Definitionsgebiet $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, das einfach zusammenhängend ist und geben die stetigen Funktionen

$$g, h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vor. Im Folgenden betrachten wir die Dgl vom *Typ 4)*

$$g(x, y) + h(x, y)y' = 0$$

Definition 1.4. *Wir nennen die Differenzialgleichung vom Typ 4) exakt, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion F auf $\mathbb{D}$ gibt mit*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = g(x,y) \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = h(x,y)$$

F wird Stammfunktion genannt.

Bemerkung. Eine Lösung der Dgl vom Typ 4) bedeutet: Finde ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y(x)) + h(x,y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

für alle $x \in I$.
Nehmen wir an, y sei eine Lösung der Dgl Typ 4). Wir definieren

$$r : I \longrightarrow \mathbb{D},\ r(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$$

Dann folgt

$$r'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}.$$

Weiter bilden wir das Vektorfeld

$$v : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ v(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix}.$$

Dann kann man den Typ (4) in der Form

$$(4') \qquad \langle v(x,y), r'(x)\rangle = 0 \text{ für alle } x \in I$$

schreiben ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$).
Gehen wir von (4') aus und nehmen wir an, dass die Dgl exakt ist. Dann bedeutet dies: Es gibt eine Stammfunktion $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = g(x,y) = v_1(x,y) \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = h(x,y) = v_2(x,y)$$

Damit bildet F ein Potential für v und wir können (4') in der Form (wegen der Kettenregel)

$$(F \circ r)'(x) = \langle \mathrm{grad} F(x,y(x)), r'(x)\rangle = 0$$

ausdrücken. Ist also y eine Lösung von (4) (oder (4')), so folgt

$$F(x,y(x)) = C \text{ für alle } x \in I.$$

Also: Ist eine Dgl vom Typ (4) gegeben, so suche man nach einem Potential. Wann existiert ein Potential? Da $\mathbb{D}$ einfach zusammenhängend ist, wenn

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y)$$

(Integrabilitätsbedingung).

Satz 1.2.2. *1. Die Funktionen g, h seien auf $\mathbb{D}$ stetig und es sei $g^2(x,y) + h^2(x,y) > 0$. Ist (4) exakt und ist $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion (Potential), so sind die Lösungen die so genannten Integralkurven $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, d.h. $F(x, y(x)) = C$ für alle $x \in I$ für festes $C \in \mathbb{R}$.*

2. Ist $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ einfach zusammenhängend und gilt die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y),$$

so gibt es ein Potential wie in 1), d.h. die Dgl ist eaxkt.

Beispiel.

1. Betr.

$$y^2 e^{xy} + 3x^2 y + (x^3 + (1+xy)e^{xy})y' = 0$$

auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$. Ist die Dgl exakt?

$$\begin{aligned} g(x,y) &= y^2 e^{xy} + 3x^2 y \\ h(x,y) &= x^3 + (1+xy)e^{xy} \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} g_y(x,y) &= 2ye^{xy} + y^2 x e^{xy} + 3x^2 \\ h_x(x,y) &= 3x^2 + ye^{xy} + xy^2 e^{xy} + ye^{xy} \end{aligned}$$

Also

$$g_y(x,y) = h_x(x,y)$$

und es gibt eine Stammfunktion F (oder Potential) mit $F_x = g$. Und somit

$$F(x,y) = ye^{xy} + x^3 y + z(y)$$

Es muss gelten

$$h(x,y) = F_y(x,y) = \underbrace{e^{xy} + xye^{xy} + x^3}_{h(x,y)} + z'(y) \ \Rightarrow z'(y) = 0 \ \Rightarrow z(y) = \text{const}$$

Also

$$F(x,y) = y(e^{xy} + x^3)$$

Damit sind die allgemeinen Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und es gilt die implizite Darstellung:

$$\begin{aligned} y \ &: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist Lösung mit der impliziten Darstellung} \\ &F(x, y(x)) = y(x)\left(e^{xy(x)} + x^3\right) = C, \ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Nicht jede Dgl ist exakt, kann aber exakt gemacht werden. Dazu betrachten wir das folgendes Beispiel

   Beispiel 1.2.9.
$$y + 2xy' = 0 \tag{1.45}$$
   ist nicht exakt, denn wegen $g(x,y) = y$ und $h(x,y) = 2x$ folgt
$$g_y(x,y) = 1 \neq h_x(x,y) = 2.$$
   Wenn man die Dgl mit $\sqrt{x}$ durchdividiert, wird sie exakt:
$$\frac{y}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}y' = 0 \tag{1.46}$$
   Mit $\tilde{g}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$ und $h(x,y) = 2\sqrt{x}$ folgt diesmal
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y).$$
   Also ist (1.45) nicht exakt, aber (1.46) ist es. Ebenso gilt dies für
$$y^2 + 2xyy' = 0 \tag{1.47}$$
   Für (1.46) ist $F_1(x,y) = 2y\sqrt{x}$ ein Potential und für (1.47) stellt $F_2(x,y) = xy^2$ eins dar.

Definition 1.5. *Eine Funktion $M : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ nennt man integrierenden Faktor für die Dgl (4) (oder (4')), wenn die Dgl*
$$M(x,y)g(x,y) + M(x,y)h(x,y)y' = 0$$
exakt ist.

In diesem Fall gilt:
$$\frac{\partial(Mg)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(Mh)}{\partial x}(x,y)$$
also ergibt sich mit der Produktregel
$$M_y \cdot g + Mg_y = M_x \cdot h + Mh_x \tag{1.48}$$
Dies ist eine so genannte *partielle Differenzialgleichung* für M. Will man einen integrierenden Faktor bestimmen, muss man (1.48) lösen. Meist lässt sich das im allgemeinen Fall nicht in expliziter Form machen! Wenn man annimmt, dass M nur von x abhängt (und das geht nur, wenn $\frac{g_y - h_x}{h}$ nur von x abhängt), so folgt aus (1.48)
$$M\frac{\partial g}{\partial y} = M'h + M\frac{\partial h}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{g_y - h_x}{h} = \frac{M'}{M} = (\ln(M))'.$$

Beispiel 1.2.10. *1.*

$$(2x^2 + 2xy^2 + 1)y + (3y^2 + x)y' = 0$$

Die Dgl. ist nicht exakt! Warum?

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (2x^2 + 2xy^2 + 1)y \\ h(x,y) &= 3y^2 + x \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} g_y(x,y) &= (2x^2 + 2xy^2 + 1) + 4xy^2 = 2x^2 + 6xy^2 + 1 \\ h_x(x,y) &= 1 \end{aligned}$$

Als integrierenden Faktor finden wir

$$\frac{g_y - h_x}{h}(x,y) = \frac{2x^2 + 6xy^2}{3y^2 + x} = 2x = (\ln(M))' \;\Rightarrow\; M(x) = e^{x^2}$$

Damit ergibt sich die neue Dgl (diesmal exakt)

$$(2x^2 + 2xy^2 + 1)ye^{x^2} + (3y^2 + x)e^{x^2}y' = 0$$

Stammfunktion - Ansatz

$$F(x,y) = e^{x^2}(y^3 + xy) + z(x) \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = z'(x) + 2xe^{x^2}(y^3 + xy) + e^{x^2}y$$

Also $z'(x) = 0$ *und somit z.B.* $z(x) = 0$. *Damit*

$$F(x,y) = ye^{x^2}(x + y^2) = C$$

Dies sind implizit gegebene Lösungskurven (allgemeine Lösung, abhängig von der Konstanten C*).*

2.

$$y(1 + xy) - xy' = 0$$

also

$$\begin{aligned} g(x,y) &= y + xy^2 \\ h(x,y) &= -x \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= 1 + 2xy \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)(x,y) &= -1 \end{aligned}$$

Statt M von x nehmen wir nun M nur von y abhängig an. Damit ergibt sich

$$\frac{h_x - g_y}{g}(x,y) = \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y} = (\ln(M))' \;\Rightarrow\; M(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Wir erhalten die (exakte) Dgl

$$\frac{1+xy}{y} - \frac{x}{y^2}y' = 0.$$

Eine Stammfunktion ergibt sich durch den Ansatz

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + z(x) \;\Rightarrow\; F_x(x,y) = \frac{1}{y} + z'(x) = \frac{1}{y} + x \;\Rightarrow\; z(x) = \frac{x^2}{2} \;\Rightarrow$$

Lösungen sind Integralkurven, also implizit gegeben

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C.$$

1.2.4 Übung

1. Man skizziere die Richtungsfelder der folgenden auf $\mathbb{R}^2$ gegebenen Dgl.
   (a) $y' = 2|y|^{\frac{1}{2}}$
   (b) $y' = x^2 + y^2$

2. Gegeben sind die folgenden Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^2-y^2}{x+y}, y' = \frac{x^2-y^2}{x^2}, y' = \frac{x^2-y^2}{x(x+y)}, y' = \frac{(x-y)^2}{x+y}, \\ y' &= \frac{(x-y)^2}{x(x+y)}, y' = 5 + x^2 - 2x - 2y + 2xy + y^2. \end{aligned}$$

   Berechnen Sie zu $k = -1, 0, 1$ die Isoklinen und zeichnen Sie das jeweilige Richtungsfeld. Von welchem Typ sind die Differenzialgleichungen?

3. In der Medizin, Biologie bzw. Wirtschaftswissenschaften spielt die so genannte logistische Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)$$

   eine wichtige Rolle. Gesucht ist:

   (a) die allgemeine Lösung mit Skizze einiger Lösungskurven,

(b) Wertebereich des freien Parameters, damit $0 < y < 1$ ist (nur hierfür ist sie für die oben genannten Wissenschaften interessant).

(c) die Asymptoten der Lösungskurven.

(d) Welche Lösungskurven haben Wendepunkte? Wo und mit welcher Steigung?

4. Man bestimme die *Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar*

$$xy^2 - cx + 1 = 0$$

5. Ein Massenpunkt wird auf der x-Achse gemäß $x\ddot{x} = 3\dot{x}^2$ beschleunigt. Es gelte $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 2$. Zu welcher zeit t_0 gilt $\lim_{t\to t_0-} x(t) = \infty$. Man skizziere die Phasenbahn $x(t)$ und $v(t)$.

6. Man löse allgemein

$$y' = 1 - \frac{y}{x}$$

und anschließend die spezielle Lösung zu $y(2) = \frac{3}{2}$.

7. Man bestimme die allgemeine Lösung zu

$$y' = \frac{4}{x} + x^4 \sin(x)$$

und schließlich, die die durch $(2\pi, 2)$ verläuft.

8. Lösen Sie allgemein die Differenzialgleichung

$$y' = \frac{3}{x}y - y^2 - \frac{3}{x^2}$$

Welcher Typ liegt vor? Wie sehen die Lösung aus, die durch $(2, \frac{1}{2})$ bzw. $(2, \frac{7}{6})$ geht

9. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung zu

$$y' = 2y + xy^3$$

10. Gegeben ist die folgende Differenzialgleichung

$$y' = \frac{3y + x}{3x - y}$$

(a) Zeichnen Sie die Isoklinen für die Werte $k = -3, -1, 0, \frac{1}{3}, 1, \infty$ und skizzieren Sie die Lösungskurve durch $(1, 0)$.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung an. Falls Sie für x und y in impliziter Form dargestellt ist, kann man sie mittels Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ vereinfachen.

11. Gegeben sei die Dgl.
$$y' = \frac{2y+x}{2x-y}$$
   (a) Man zeichne das Richtungsfeld (Isoklinenfeld) der Dgl. 1.Ordnung.
   (b) Man löse die Dgl. allgemein.

12. Ist die auf $]1,\infty[\times]0,\infty[$ definierte Dgl.
$$y^3y' - e^{-x^3}y^4 + y^5 \ln x = y^3 \sin(x^3)$$
   vom Riccati-Typ (mit Begründung)?

13. Ist die folgende Dgl auf $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ exakt?
$$(\ln y - y \sin x) + (\frac{x}{y} + \cos x)y' = 0$$
   Wenn ja, so löse man diese allgemein.

14. (a) Man skizziere das Richtungsfeld für die Differenzialgleichungen
$$\begin{array}{rcl} y' - y^2 & = & x^2 \; x^2 + y^2 \leq 2 \\ y' = y & = & 2x \; |x|, |y| \leq 2 \end{array}$$
   indem man zunächst einige Isoklinen zeichnet und dann auf ihnen die Linienelemente einträgt.
   (b) Man berechne die Lösungen der **zweiten** Differenzialgleichung in (a) zu den Anfangsbedingungen $y(0) = -1$, $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ und zeichne diese in die Skizze ein.

15. Eine Holzkohlenprobe aus einer prähistorischen Feuerstelle wird mit dem Geigerzähler auf Radioaktivität untersucht. Die Messung ergibt 0.47 Zerfälle pro Minute und Gramm. Bei einem frisch hergestellten Holzkohlenstück werden 6.68 Zerfälle pro Minute und Gramm gemessen. Unter der Voraussetzung, dass die Radiaktivität in beiden Proben nur vom Gehalt an Kohlenstoff C_{14} herrührt und dass sich die Zusammensetzung der Atmosphäre seit der Entstehung der ersten Probe nicht geändert hat, bestimme man das Alter der Feuerstelle. C_{14} hat eine Halbwertszeit von 5568 Jahren.

16. Wie sieht die allgemeine Lösung zu
$$y' - y\cot(x) - \sin(x) = 0$$
   aus? Bestimmen Sie schließlich die spezielle Lösung zu $y(\frac{3\pi}{2}) = \pi$.

17. (a) Man gebe den Typ der Differenzialgleichung an.

(b) Man löse die Differenzialgleichung allgemein.

(c) Man bestimme die spezielle Lösung zu $y(1) = 2$.

18. Man löse allgemein die Differenzialgleichung

$$y' = \frac{x^2}{y^3}$$

Welcher Typ liegt vor? Ist es noch von einem anderen Typ?

19. Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$y' = \frac{1}{2}(\frac{y^2}{x^2} + 1)$$

Welcher Typ liegt vor? Lösen Sie sie allgemein. Welche Lösung ergibt sich bei $y(2) = 2$?

20. Gegeben ist die Dgl

$$y' = (y - x)\cot x + 1$$

(a) Wie lautet die allgemeine Lösung (Integration mittels Produktregel, Skizze einer bestimmen Isokline hilft).

(b) Wo schneiden die Lösungskurven mit $C \neq 0$ die Gerade $y = x$? Skizzieren Sie die Lösungskurven für $0 \leq x \leq 2\pi$.

(c) Wann ist $y' = 0$ bei $x = 0$? Wo tritt $y' = 0$ bei dieser Lösung sonst noch auf?

21. Gegeben ist die Dgl.

$$(2x + 4y + 2) + (4x + 12y + 8)y' = 0.$$

(a) Ist die Differenzialgleichung exakt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl. und berechnen Sie die spezielle zu $y(0) = -1$.

22. Gegeben sei die Dgl.

$$g(x,y) + h(x,y)y' = (xy^2 + xye^x) + (2x^2y + xe^x)y' = 0.$$

(a) Ist die Dgl. exakt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Man kann $w_1 = \frac{h_x - g_y}{g}$ bzw. $w_2 = -\frac{h_x - g_y}{h}$ bilden. Ist w_1 nur von y abhängig, so erhält man einen integrierenden Faktor μ für die Dgl., in dem man

$$\mu(y) = \exp\Big(\int w_1(s)ds\Big)$$

setzt. Ist w_2 nur von x abhängig, so erhält man einen integrierenden Faktor μ für die Dgl., in dem man

$$\mu(x) = \exp\Big(\int w_2(s)ds\Big)$$

bildet.

(c) Lösen Sie die Dgl. allgemein.

23. Man bestimme die allgemeine Lösung der auf $]0,\infty[\times\mathbb{R}[$ betrachteten Dgl.

$$-xy^2 - y + xy' = 0$$

24. Bestimmen Sie die Lösung des AWPs

$$y' + y\tan x = \cos^2 x,\ \ y(0) = 1$$

25. Gegeben ist die Dgl. 1.Ordnung

$$\frac{y'}{y} = e^{-x}.$$

(a) Man löse die Dgl. graphisch durch das Isoklinenverfahren für $0 \le x \le 4$ und $0 \le y \le 8$. Insbesondere zeichne man die Lösung durch den Punkt $(0, 1)$.

(b) Man löse die Dgl. allgemein und gebe die spezielle Lösung für $y(0) = 1$ an.

26. Gegeben sei die Dgl.

$$y'e^{-y} = \sin x \tag{1.49}$$

(a) Man bestimme die allgemeine Lösung der auf $\mathbb{R}^2$ betrachteten Dgl. (1.49).

(b) Man zeige, dass keine Lösung des zugehörigen AWPs mit $y(0) \ge -\ln 2$ auf ganz $\mathbb{R}$ defineirt ist.

(c) Man zeige, dass jede (maximal fortgesetzte) Lösung des zugehörigen AWPs mit $y(0) < -\ln 2$ auf ganz $\mathbb{R}$ defineirt und beschränkt ist.

27. Bestimmen Sie die Lösung zu

$$(2x + 4y + 2)dx + (4x + 12y + 8)dy = 0,\ \ y(0) = -1$$

28. Eine Eisenkugel der Masse m lässt man in Öl sinken. Die Reibungskraft ist in erster Näherung proportional zur Sinkgeschwindigkeit v. Die Beschleunigung ist $\dot{v}$. Die Bewegung folgt also der Dgl.

$$m\dot{v} = mg - kv$$

(a) Ermitteln Sie die besondere Lösung der Dgl. für $v = 0$ bei $t = 0$.

(b) Welcher Endgeschwindigkeit $v_E = \lim_{t\to\infty}$ nähert sich v asymptotisch an?

(c) Wie groš ist k in Abhängigkeit von v_E? (Nachdem bei dem Versuch v_E praktisch schon nach kurzer Zeit mit sehr guter Näherung ablesbar ist, kann man hiermit Ölviskosität experimentell bestimmen).

29. Gegeben ist die Dgl.

$$y' = y - x^2$$

Man zeichne das Richtungsfeld und einige Lösungskurven (mind. 6 Isoklinen, 4 Lösungskurven). Man zeichne die spezielle Lösung für $y(0) = -2$ in das Isoklinenfeld (Richtunsfeld) ein. Welche Besonderheit hat diese Lösungskurve? Lösen Sie die Dgl. allgemein.

30. Von den Ausgangspunkten $H_0(a, a)$ und $M_0(0, a)$ (mit $a > 0$) der $(x, y)-$Ebene aus setzen sich Hund H und Mensch M gleichzeitig in Bewegung, und zwar M auf der y-Achse in Richtung O (O ist der Ursprung), H stets in Richtung M. H möchte M genau in O erreichen und achtet deswegen darauf, dass er von M stets den selben Abstand hat wie M von O. Wie erhält man eine Dgl. für die Bewegung von H? Welche Bahnkurve $y = f(x)$ ergibt sich dafür? Kann man sie auch ohne Dgl. finden, nur durch Anwendung eines Satzes der elementaren Geometrie?

31. Ein Wasserskifahrer W wird an einem 20 Meter langem Seil hinter einem Boot B hergezogen. Das Boot bewegt sich entlang der $x-$Achse mit konstanter Geschwindigkeit. Das Seil ist immer gespannt. Am Beginn ist der Wasserskifahrer im Punkt $(0, 20)$, das Boot im Ursprung. Wenn das Boot sich bewegt, wird der Wasserskifahrer zu gewissen Zeitpunkten im Punkt $W(x, y)$ sein. Sei $A = (x, 0)$ der Punkt auf der $x-$Achse als Projektion von $W(x, y)$ auf die $x-$Achse.

    (a) Man berechne die Länge AB in Abhängigkeit von y.

    (b) Ist $\alpha = \angle ABW(x, y)$, so sei $\theta = \pi - \alpha$ der ergänzende Winkel zu $x-$Achse. Man bestimme $\tan\theta$ in Abhängigkeit von y.

    (c) Da das Seil die Tangente an die Kurve des Wasserskifahrers darstellt, kann man $\frac{dy}{dx}$ als Funktion von y ausdrücken. Formulieren Sie die Bahn des Wasserskiläufers als Differenzialgleichung.

32. Man löse die Differenzialgleichung von Aufgabe 3) in Abschnitt 5.1. zuerst für u und dann von y. Die gefundene Kurve nennt man *Kettenlinie*.

33. Lösen Sie die Differenzialgleichung

$$\frac{1}{2}y dx + (x + x^{\frac{1}{2}} \sin y) dy = 0$$

allgemein. Ist sie exakt?

34. Ist die Differenzialgleichung

$$\cos x dx + (2y + \sin x + 1)dy = 0$$

exakt? Lösen Sie sie allgemein.

35. Lösen Sie allgemein

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

36. Wie sieht die allgemeine Lösung zu

$$y' = y^2 \cos x$$

aus?

37. Ist die Dgl

$$(x^2y^2 + x^2ye^x)dx + (2x^3y + x^2e^x)dy = 0$$

exakt? Wenn nicht, bestimmen Sie einen integrierenden Faktor und lösen Sie sie danach allgemein.

38. * Lösen Sie die Differenzialgleichung

$$(2x^2y + y^3) + (2xy^2 + x^3)y' = 0$$

Dazu bestimme man einen integrierenden Faktor m der von $u = xy$ abhängt.

39. * Man betrachte die so genannte *Riccatische Dgl.* auf $I \times \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$ offen und $g, h, k : I \longrightarrow$ stetig:

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x) \tag{1.50}$$

Man zeige:

(a) Es seien y_1, y_2 Lösungen von (1.50). Dann ist $u := y_1 - y_2$ Lösung der auf $\mathbb{D}(y_1) \times \mathbb{R}$ betrachteten *Bernouillischen Dgl.* ($\mathbb{D}(y_1)$ Definitionsbereich von y_1)

$$y' + (g(x) + 2h(x)y_1(x))y = h(x)y^2 \tag{1.51}$$

(b) Seien y_1, y_2 Lösungen von (1.50) und $I_0 \subset I$ mit $y_1(x) \neq y_2(x)$ $(x \in I_0)$. Dann ist

$$z = \frac{1}{y_1 - y_2}\bigg|_{I_0}$$

Lösung der auf $\mathbb{D}(y_1) \times \mathbb{R}$ gegebenen linearen Dgl.

$$y' - (g(x) + 2h(x)y_1(x))y + h(x) = 0 \tag{1.52}$$

(c) Sei y_1 Lösung von (1.51) und z Lösung von (1.52) mit $z(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{D}(y_1)$). Dann ist

$$y_2 = y_1 - \frac{1}{z}$$

Lösung von (1.51).

40. Man bestimme die Zeit, in der ein zylindrischer Tank von 250cm Radius und von 350cm Höhe durch ein kreisförmiges Loch von 5 cm Durchmesser ausläuft. Das Wasser im Tank soll dabei mit der Geschwindigkeit $v = 26\sqrt{h}$cm/s ausströmen, wobei h der Wasserstand im Tank ist.

41. Ein Pferd ist zur Zeit $t = 0$ mit einem (unendlich dehnbaren) straff gespannten Gummiband der Länge $a > 0$ an einer Wand festgebunden. Es entfernt sich mit konstanter Geschwindigkeit $v_p > 0$ von der Wand. Eine Schnecke befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Befestigungspunkt des Gummibandes an der wand und beginnt, mit konstanter Geschwindigkeit $v_S \in]0, v_p[$ auf dem Band hin zu kriechen. Holt die Schnecke das Pferd ein?

42. (a) Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $p, f :\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ferner seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $G = \{(x, y); x \in I, y > 0\}$. Man betrachte in G die so genannte *Bernouillische Dgl.*

$$y' + p(x)y = f(x)y^\alpha$$

Man zeige, dass das Problem der Lösung dieser Dgl. äquivalent ist dem Problem der Lösung einer geeigneten linearen Dgl. 1.Ordnung.

(b) Man bestimme die Menge aller (maximal fortgesetzten) Lösungen der auf $]1, \infty[\times]0, \infty[$ betrachteten Dgl.

$$xy' \ln x + y(xy - 1) = 0 \tag{1.53}$$

Wie lautet diese Menge , wenn man (1.53) auf $]1, \infty[\times\mathbb{R}$?

43. * Es seien I, g, h, k wie in der Dgl. (1.50). Seien $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ und y_1, y_2 Lösungen des AWPs

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x),\ \ y(x_0) = y_0$$

Man zeige ohne Benutzung des Satzes von Picard-Lindelös und unter Verwendung von Aufgabe 32b), dass

$$\forall\ x \in \mathbb{D}(y_1) \cap \mathbb{D}(y_2):\ \ y_1(x) = y_2(x)$$

44. Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Dgl.

$$y' = 1 - x + x^2 + (1 - 2x)y + y^2 \tag{1.54}$$

(a) Man bestimme eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung, in dem man y als Polynom von x ansetzt.

(b) Man bestimme dei allgemeine Lösung von (1.54).

45. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ferner seien $y, z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit

$$\begin{aligned} y'(x) &\geq h(x) - g(x)y(x) \\ z'(x) &\leq h(x) - g(x)z(x),\ z(x_0) = y(x_0),\ (x \in I) \end{aligned}$$

Man zeige, dass dann

$$\begin{aligned} z(x) &\leq y(x)\ (x \in I, x \geq x_0) \\ y(x) &\geq y(x)\ (x \in I, x \leq x_0) \end{aligned}$$

46. * Man beweise das *Lemma von Grownwall*:
Es seien $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A < B$ und $u, v : [A, B] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion mit $u, v \geq 0$. Gilt

$$\begin{aligned} \text{i) } u(x) &\leq \int_A^x u(t)v(t)dt\ (x \in [A, B])\ \text{ oder} \\ \text{ii) } u(x) &\leq \int_x^B u(t)v(t)dt\ (x \in [A, B]) \end{aligned}$$

so folgt $u = 0$.

47. Es sei y die maximal fortgesetzte Lösung des AWPs

$$y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 0$$

(a) Wie groš ist der Definitionsbereich $\mathbb{D}(y)$ von y aufgrund der Satzes von Picard-Lindelöf?

(b) Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $\alpha = y(\frac{1}{2}) > 0$ ist.

(c) Man zeige, dass $\mathbb{D}(y)$ beschränkt ist, in dem man unter Verwendung von Aufgabe..y mit der maximal fortgesetzten Lösung des AWPs

$$z' = \alpha^2 + z^2,\ z(\frac{1}{2}) = \alpha$$

vergleicht.

48. (a) Man bestimme die Lösungen der Bernouillischen Differenzialgleichung

$$y' + y = y^2 \sin x,\ x \geq 0,\ y\, 0,\ y(0) = y_0 \in]0, 1[$$

Existieren die Lösungen für alle $x \geq 0$?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ kann man die Bernouillische Differenzialgleichung

$$y' + g(x)y = h(x)y^\alpha$$

auch für negative y lösen? Hierfür seien $g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

1.3 Differenzialgleichungen 2.Ordnung

Als einleitendes Beispiel untersuchen wir eine Masse die an einer Feder befestigt ist (mit Federkonstante k). Die Reibung wird vernachlässigt, die Ruhelage sei $y = 0$. Nach dem Hook'schen Gesetz gilt: Kraft=-ky, wobei y den Ort angibt. Also bedeutet $y < 0$ entspannen und $y > 0$ zusammenziehen. Die Beschleunigung ist $\ddot{y}$, also folgt

$$m\ddot{y} = -ky$$

Hier haben wir eine einfache Dgl 2.Ordnung vor uns. Allgemein kann man eine Dgl 2.Ordnung in der Form

$$y'' = f(x, y, y')$$

oder in impliziter Form

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

angeben. Als AWP formuliert man zusätzlich z.B. Anfangswerte zu x_0 mit $y_0 = y(x_0)$ und $y_1 = y'(x_0)$.

Dgl vom Typ (5)

$$y'' = f(x) \;\Rightarrow$$

$$y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1 \;\Rightarrow$$

$$y = \int (F(x) + C_1)dx = \Phi(x) + C_1x + C_2, \Phi' = F$$

Beispiel 1.3.1. Dgl der Biegelinie *Ein Träger ist bei $x = 0$ und $x = l$ gelagert, der aus neutrale Faser besteht. Die Länge bleibt somit gleich; gesucht ist eine Gleichung der Biegelinie. Die y-Achse wird nach unten angetragen; die Krümmung $\kappa(x)$ im Punkt x hängt vom Biegemoment $M(x)$ ab;*
$M(x)$ = Summe aller rechts und links von x angreifenden Drehmomente;
E = Elastizitätsmodul des Trägers und
I = Flächenträgheitsmoment des Querschnitts;
$E \cdot I$ = Biegesteifigkeit. Es gilt

$$\kappa(x) = -\frac{1}{E \cdot I}M(x)$$

Krümmung= $\frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{E \cdot I}M(x)$; sehr flaches Biegen bedeutet sehr kleines y' und damit approximativ

$$y'' = -\frac{1}{E \cdot I}M(x)$$

Deshalb wählen wir nun einen Träger mit konstantem Eigengewicht q pro Längeneinheit und Biegesteifigkeit = $E \cdot I$ = konstant. In $(0, 0)$ und $(l, 0)$ ist der Träger gelagert. Die Länge *sei $x = l$ mit kleinem Biegen. Gewicht bis zur Stelle x entspricht qx; der Hebelarm ist beim Schwerpunkt $= \frac{1}{2}qx$. Bei (0.0) beträgt das Trägergewicht $= \frac{1}{2}ql$. Das Biegemoment beträgt $M(x) = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2$. Also*

$$y'' = -\frac{q}{2E \cdot I}(lx - x^2) \;\Rightarrow\; y' = -\frac{q}{2E \cdot I}\big(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{3}x^3 + C_1\big) \;\Rightarrow$$

$$y = -\frac{q}{2E \cdot I}\big(\frac{1}{6}lx^3 - \frac{1}{12}x^4 + C_1 x + C_2\big) \;\Rightarrow\; \textit{mit } y = 0 \textit{ für } x = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$$

$$\textit{und } y = 0 \textit{ für } x = l \;\Rightarrow C_1 = \frac{1}{12}l^3 - \frac{1}{6}l^3 = -\frac{1}{12}l^3.$$

Also Gleichung der Biegelinie folgert man

$$y = \frac{q}{24E \cdot I}\big(x^4 - 2lx^3 + l^3 x\big)$$

Typ (6)

$$y'' = f(y)$$

Durch Substitution kann er auf den Typ (1) gebracht werden: Dazu substituiert man $y' = u \;\Rightarrow\; y'' = \frac{du}{dx}$; dies hilft allerdings beim Einsetzen nichts, da hiermit drei Variable auftauchen. Besser ist die Substitution

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u \;\Rightarrow\; u \cdot \frac{du}{dy} = f(y) \;\overset{\text{trennbare Variable}}{\Rightarrow}$$

$$\int u du = \int f(y) dy$$

Ist Φ eine Stammfunktion von f, so folgt

$$\frac{1}{2}u^2 = \Phi(y) + C_1; \quad \text{mit } u = y' \text{ ergibt sich}$$

$$[u = y' =]\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2(\Phi(y) + C_1)} \text{ für alle } y \text{ mit positivem Radikant } \Rightarrow$$

$$\text{trennbare Variable} \underbrace{\int \frac{dy}{\sqrt{\Phi(y) + C_1}}}_{\Psi(y, C_1)} = \pm\sqrt{2}\int dx = \pm\sqrt{2}x + C_2$$

Eventuelles Auflösen nach y hängt von der Struktur von Ψ ab.

Beispiel 1.3.2. *Eine Masse m ist an einem Faden der Länge l im Punkt O befestigt. In der Ruhephase ist der Winkelausschlag $\varphi = 0$. Anstoßen führt es zu einer Pendelbewegung von m. Wir betrachten die einzelnen Kraftvektoren, die auf das Pendel einwirken:*

Gewichtskraft: $F = mg$; *Beschleunigungskraft* $F_l = mg\sin\varphi$; *Zentriwinkel* $\varphi \Leftrightarrow s = l\varphi$ *Bogenlänge;* $\Rightarrow$

$$\ddot{s} = l\ddot{\varphi} \;\Rightarrow\; |ml\ddot{\varphi}| = |mg\sin\varphi|.$$

Für $\varphi > 0$ *bedeutet* $\dot{\varphi} > 0$ *Bewegung nach rechts* $\Rightarrow \dot{\varphi}$ *nimmt ab;*
Für $\varphi >< 0$ *bedeutet* $\dot{\varphi} < 0$ *Bewegung nach links* $\Rightarrow |\dot{\varphi}|$ *nimmt zu.*
Allerdings zeigt $\dot{\varphi}$ *in die entgegengesetzte Richtung, also folgt* $\ddot{\varphi} < 0$. *Analog für* $\varphi < 0 \;\Rightarrow$ $\ddot{\varphi} > 0$. *Also*

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi$$

Setze $u = \dot{\varphi}$, *und damit* $\ddot{\varphi} = u\frac{du}{d\varphi} \;\Rightarrow$

$$lu\frac{du}{d\varphi} = -g\sin\varphi \;\Rightarrow\; \int u\,du = -\frac{g}{l}\int \sin\varphi\, d\varphi \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}u^2 = \frac{g}{l}(\cos\varphi + C_1)$$

Bei $\varphi = \varphi_{\max}$ *ist* $\dot{\varphi} = u = 0$, *also*

$$0 = \cos\varphi_{\max} + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = -\cos\varphi_{\max} \;\Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_{\max})} \;\Rightarrow$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi_{\max})}} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\int dt$$

Links steht ein so genanntes elliptische Integral, bei dem es keine geschlossene Darstellung gibt. Zur Lösung benutze man die Taylor-Reihen. Daher muss man für eine explizite Lösung das Modell vereinfachen und setzt statt $\sin\varphi$ *für kleine Auslenkung* φ. *Somit erhält man die Dgl*

$$l\ddot{\varphi} = -g\varphi \;\Rightarrow$$

Zuerst liefert die Lösung eine Dgl 1.Ordnung

$$lu\frac{du}{d\varphi} = -g\varphi \;\Rightarrow\; \textit{1. Integration ergibt}$$

$$\int u\,du = -\frac{g}{l}\int \varphi\, d\varphi \;\Rightarrow\; \frac{u^2}{2} = -\frac{g}{2l}(\varphi^2 + C_1) \;\Rightarrow\; C_1 = -\varphi_{\max}^2$$

Mit erneuter Lösung einer Dgl 1.Ordnung:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}(\varphi_{\max}^2 - \varphi^2)} \;\Rightarrow\; \textit{2.Integration ergibt}$$

$$\int -\frac{d\varphi}{\sqrt{(\varphi_{\max}^2 - \varphi^2)}} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \int dt \;\Rightarrow$$

$$\arcsin(\frac{\varphi}{\varphi_{\max}}) = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}(t + C_2)$$

Für $\varphi = 0$ folgt $C_2 = 0$, also ändert sich nichts, wenn man $t = 0$ setzt. Damit

$$\varphi = \varphi_{\max} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}} t)$$

und man liest die Pendelfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ und Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ab, die unabhängig von $\varphi_{\max}$ sind.

Dgl vom Typ (7)

Wir unterteilen diesen Fall noch einmal

a)

$$y'' = f(x, y')$$

Hier substituieren wir $y' = u$ und erhalten

$$y'' = \frac{du}{dx} \Rightarrow$$

eine Dgl erster Ordnung

$$\frac{du}{dx} = f(x, u)$$

b)

$$y'' = f(y, y')$$

diesmal substituieren wir

$$y' = u \;\Rightarrow\; y'' = u\frac{du}{dy} \text{ (analog zum Fall (6)) } \Rightarrow$$

$$u\frac{du}{dy} = f(y, u)$$

Weitere Aussagen und Möglichkeiten zur Lösung hängen von der Form der Funktion f ab.

Beispiel 1.3.3. *1.* **Freier Fall mit Luftreibung** *Dazu führen wir ein:*

$s(t)$: *zurückgelegter Weg bis zur Zeit t*

$\dot{s}(t)$: *Geschwindigkeit zur Zeit t*

$\ddot{s}(t)$: *Beschleunigung zur Zeit t*

Wir nehmen ein Objekt mit Reibung an. Dazu sei die Reibungskraft proportional zu $\dot{s}(t)^2$

also:

$$F = -c\dot{s}(t)^2 \;\Rightarrow\; m\ddot{s}(t) = mg - c\dot{s}(t)^2.$$

(statt y wird s und statt x der Zeitparameter t gesetzt); als Randbedingungen erhalten wir

$$s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0$$

Wir substituieren $u = \dot{s}$ *und bekommen* $\ddot{s} = \frac{du}{dt}$ $\Rightarrow$ *Dgl 1.Ordnung*

$$m\frac{du}{dt} = mg - cu^2 \;\; (\textit{ Typ (1) in u und t})$$

erste Integration liefert

$$m\int \frac{du}{mg - cu^2} = \int dt \;\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{m}{cg}}\,artanh\big(\sqrt{\frac{c}{mg}}u\big) = t + C_1$$

Wir haben $u(0) = \dot{s}(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$. *Auflösen nach* $u = \dot{s}$ *ergibt: Dgl 1.Ordnung:*

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{mg}{c}}\tanh(\sqrt{\frac{cg}{m}}t)$$

und die zweite Integration liefert

$$s = \frac{m}{c}\ln\big(\cosh(\sqrt{\frac{cg}{m}}t)\big) + C_2$$

Da $s(0) = 0$ *ist, folgt* $C_2 = 0$.

2. *(Verfolgungskurve)*

$$x''(y) = -\frac{x'(y)^2\sqrt{1 + x'(y)^2}}{ky} \tag{1.55}$$

1.3.1 Lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten - Typ (8)

Beispiel 1.3.4. *Wir wählen das einleitendes Beispiel aus Abschnitt 9.3, diesmal allerdings mit Reibungskraft* $F_R = -b\dot{y}$ *(b ist der Dämpfungsfaktor).*
Außerdem erlauben wir eine zeitabhängige äußere Kraft: $F_a(t)$ *in Richtung y. Damit ergibt sich die Dgl.*

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y} + F_a(t)$$

Somit liegt eine Linearkombination von $y, \dot{y}$ *und* $\ddot{y}$ *vor.*

Die Standardform lautet - nun allgemein mit Variabler "x" geschrieben

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = s(x)$$

für eine *Störfunktion* $s(x)$. Falls vor y'' noch ein Faktor $a_2 \neq 0$ steht, muss man mit a_2 durchdividieren. Wenn $s(x) = 0$, so nennt man die Dgl *homogen.*
Wir untersuchen zuerst die
Homogene lineare Dgl. 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1.56}$$

Dies stellt einen Spezialfall der allgemeinen linearen Dgl n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar. Sind nun $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$ zwei Lösungen von (1.56), so auch

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

mit konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Denn

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_0 &= 0| \cdot C_1 \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_0 &= 0| \cdot C_2 \end{aligned}$$

und danach sieht man, dass $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ die Dgl. erfüllt, wenn man beide Gleichungen addiert. Da $y = 0$ immer eine Lösung ist, werden diese ab jetzt ausgeschlossen (wenn nicht ausdrücklich erwähnt). Sind also f_1, f_2 linear unabhängig (d.h. ist $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$ so folgt $c_1 = 0 = c_2$), so folgt

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

Sie stellt für beliebige $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dar. Allerdings müssen $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$ linear unabhängig sein, denn gilt $y_1 = \alpha y_2$, so folgt

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = y = C_1 \alpha y_2 + C_2 y_2 = (C_1 \alpha + C_2) y_2 = C^* y_2$$

und somit gibt es nur einen freien Parameter, obwohl es sich um eine Dgl. 2.Ordnung handelt. Wie sieht nun die allgemeine Lösung von (1.56) aus? Wir wählen den Ansatz:

$$\begin{aligned} \text{lin. 1.Ordnung} &: \quad y' = -a_0 y \;\Rightarrow\; \text{Lösung } y(x) = e^{-a_0 x} \\ \text{lin. 2.Ordnung} &: \quad \text{Ansatz } y(x) = e^{\lambda x} \;\Rightarrow \\ & \quad y' = \lambda e^{\lambda x},\; y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \;\Rightarrow\; \text{ in (1.56)} \\ & \quad \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0| : (e^{\lambda x} \neq 0) \\ & \quad \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird die *charakteristische Gleichung* der Dgl (1.56) genannt. Wir bestimmen die Diskriminante

$$D = a_1^2 - 4a_0$$

und unterscheiden drei Fälle

1. Fall: $D > 0$: Damit sind $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a_1 \pm \sqrt{D})$ zwei reelle Lösungen; weil $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt, folgt also
$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{und } y_2 = e^{\lambda_2 x}$$
bilden zwei linear unabhängige Lösungen von (1.56). Die allgemeine Lösung hat die Form
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{1.57}$$

2. Fall: $D = 0$: Damit ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}a_1 = \lambda$ die einzige Lösung (und somit auch reell). Somit sind natürlich (da identisch) $e^{\lambda_1 x}$ und $e^{\lambda_2 x}$ linear abhängig. Die Suche nach weiteren führt zu dem ersten einfachen Ansatz
$$y_1(x) = e^{\lambda x} \quad \text{und } y_2(x) = xe^{\lambda x}.$$
Es ist y_2 eine Lösung von (1.56) (aber nur im Fall $D = 0$!) Denn:
$$y_2(x) = xe^{\lambda x} \;\Rightarrow\; y_2'(x) = e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x} = y_1(x) + xy_1'(x) \;\Rightarrow\; y_2''(x) = 2y_1'(x) + xy_1''(x) \;\Rightarrow$$
einsetzen in die Dgl (1.56) ergibt:
$$\begin{aligned} 2y_1' + xy_1'' + a_1(y_1 + xy_1') + a_0 x y_1 &= \\ x\,\underbrace{(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1)}_{=0\text{, denn } y_1 \text{ ist Lösung}} + 2y_1' + a_1 y_1 &= \\ 2y_1' + a_1 y_1 = 2\lambda_1 y_1 + a_1 y_1 = -a_1 y_1 + a_1 y_1 &= 0 \end{aligned}$$
da $\lambda = -\frac{1}{2}a_1$. Weil $y_1(x) = e^{\lambda x}$ und $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ linear unabhängig sind, ist
$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$$
für beliebige C_1, C_2 die allgemeine Lösung der Dgl (1.56).

3. Fall: $D < 0$: Dann ist $-D = 4a_0 - a_1^2 > 0$ und somit lauten die Lösungen der charakteristischen Gleichung:
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a_1 \pm i\sqrt{-D}).$$
Wir setzen $\delta = \frac{1}{2}a_1$ und $\omega_e = \frac{1}{2}\sqrt{-D}$. Also ergibt sich
$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_e$$
dabei nennt man δ die Abklingkonstante und ω_e die Eigenfrequenz. Es ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Und damit sind
$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \text{ und } y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

linear unabhängige Lösungen, allerdings komplexwertig! Die allgemeine Lösung wird beschrieben durch

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

Aber unsere Dgl bezieht sich auf reellwertige Funktionen. Deshalb schreiben wir gemäß der Euler-Darstellung

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{(-\delta + i\omega_e)x} + C_2 e^{(-\delta - i\omega_e)x} \\ &= e^{-\delta x}\big(C_1 e^{i\omega_e x} + C_2 e^{-i\omega_e x}\big) \\ &= e^{-\delta x}\big(C_1(\cos(\omega_e x) + i\sin(\omega_e x)) + C_2(\cos(\omega_e x) - i\sin(\omega_e x))\big) \\ &= e^{-\delta x}\big((C_1 + C_2)\cos(\omega_e x) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega_e x)\big) \end{aligned}$$

Genau dann wenn $C_1 = \overline{C_2}$ (konjugiert komplex), ergibt sich

$$A = C_1 + C_2 \text{ und } B = i(C_1 - C_2)$$

Sie sind reell und somit haben wir die folgenden reellen Lösungen

$$y(x) = e^{-\delta x}\big(A\cos(\omega_e x) + B\sin(\omega_e x)\big)$$

Wir können die Lösungen auch alternativ schreiben:

$$A\cos(\omega_e x) + B\sin(\omega_e x) = k\cos(\omega_e x - \theta)$$

Da $k\cos(\omega_e x - \theta) = k\cos(\omega_e x)\cos\theta + k\sin(\omega_e x)\sin\theta$ folgt mit dem Koeffizientenvergleich

$$A = k\cos\theta \text{ und } B = k\sin\theta$$

also kann man die freien Parameter k und θ anstatt A und B wählen und wir haben nur eine trigonometrische Funktion cos. Der Parameter k wird die *Amplitude* und θ die *Phasenverschiebung* genannt. Damit kann man aus A und B die Parameter k und θ bestimmen:

$$k = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ und } \theta = \arccos\frac{A}{k}(\text{ falls } B > 0), \theta = -\arccos\frac{A}{k}(\text{ falls } B \leq 0).$$

Statt $\cos(\omega_e x - \theta)$ kann man auch $\sin(\omega_e x - \theta + \frac{\pi}{2})$ wählen.

Beispiel 1.3.5. *Betrachte*

$$y'' + 2,8y' + 25y = 0$$

Charakt. Gleichung liefert

$$\lambda^2 + 2,8\lambda + 25 = 0 \;\Rightarrow\; D = -92,16 < 0,\; \sqrt{-D} = 9,6 \;\Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-2,8 \pm 9,6i) = -1,4 \pm 4,8i.$$

Somit folgt $\delta = 1,4$ und $\omega_e = 4,8$ und die allgemeine Lösung hat die Form

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-1,4x}(A\cos 4,8x + B\sin 4,8x) \\ y'(x) &= e^{-1,4x}\big(-1,4(A\cos 4,8x + B\sin 4,8x) + 4,8(-A\sin 4,8x + B\cos 4,8x)\big) \end{aligned}$$

Wählt man die Anfangsdaten $y(0) = 1$ ergibt sich $A = 1$ und für $y'(0) = 0$ folgt

$$0 = -1,4A + 4,8B \;\Rightarrow\; B = \frac{7}{24} \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{24}e^{-1,4x}(24\cos 4,8x + 7\sin 4,8x) \\ &= \frac{25}{24}e^{-1,4x}(\cos(4,8x - \arccos(0.96))) \end{aligned}$$

Wir kehren zum Anfangsbeispiel mit der Feder zurück und stellen die folgenden Konstanten fest:

$$a_1 = \frac{b}{m},\; a_0 = \frac{k}{m},\; m \text{ ist die Masse und } k \text{ ist die Federkonstante.}$$

Wir betrachten die drei Fälle für $D = \frac{b^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = \frac{b^2-4km}{m^2}$

1. Fall: $D > 0$: dies ist der *Kriechfall*, die Ruhelage wird langsam erreicht;
2. Fall: $D = 0$: dies ist der *aperiodische Grenzfall*; die Ruhelage wird optimal schnell erreicht;
3. Fall: $D < 0$: da $F_a(t) = 0$ existiert keine äußere Kraft und deshalb nennt man den Fall die *frei gedämpfte Schwingung*.

Inhomogene lineare Dgl. 2. Ordnung mt konstanten Koeffizienten

Ab jetzt führen wir den Störterm $s(x)$ auf der rechten Seite ein.

$$y'' + a_1y' + a_0y = s(x) \tag{1.58}$$

wobei $s(x)$ zuerst eine beliebige stetige Funktion sein soll. Wir gehen in drei Schritten vor, um (1.58) allgemein zu lösen:

1. Schritt: Bestimmen der allgemeinen Lösung y_h der homogenen Dgl (1.56)
$$y_h'' + a_1y_h' + a_0y_h = 0.$$
2. Schritt: Auffinden einer speziellen Lösung y_p der inhomogenen Dgl.
3. Schritt: Allgemeine Lösung der Dgl (1.58) ist dann durch $y = y_p + y_h$ gegeben.

Ist y_{p_1} eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl (1.58) zum Störterm $s_1(x)$ und ist y_{p_2} eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl (1.58) zum Störterm $s_2(x)$, so ist $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl zum Störterm $s_1(x) + s_2(x)$. Damit kann man Störterme, die sich als Summen darstellen, in ihre einzelnen Summanden zerlegen und getrennt behandeln. Andererseits bedeutet dies, dass man Störterme verschiedenen Grundtyps behandelt, die speziellen Lösungen findet und dann kompliziertere zusammengesetzte Ausdrücke für die Störterme berücksichtigen kann.
Die Methode der Variation der Konstanten, wie wir sie aus dem Fall der linearen Dgl 1.Ordnung verwendet haben, kann hier selten angewendet werden, da dies bei zwei Integrationsschritten oft zu kompliziert wird. Daher ziehen wir uns vorerst auf einen Typ des Störterms von der Form

$$s(x) = (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n)e^{\alpha x} \tag{1.59}$$

zurück. Hierbei sind $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Wir wählen einen Ansatz der Form:

$$y_p(x) = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n)x^m e^{\alpha x} \tag{1.60}$$

wobei $b_0, b_1, \ldots, b_n$ zu bestimmende Konstanten sind. Die natürliche Zahl $m = 0, 1, 2$ gibt an, wie oft α Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Dies bedeutet:

- Ist $\lambda_1 \neq \alpha \neq \lambda_2$, so ist $m = 0$.
- Ist $\lambda_1 = \alpha \neq \lambda_2$ oder $\lambda_1 \neq \alpha = \lambda_2$, so ist $m = 1$.
- Ist schließlich $D = 0$ und $\lambda_1 = \alpha = \lambda_2$, so folgt $m = 2$.

Die "Rolle" von m: Im Fall $m = 1$ ist $b_0 e^{\alpha x}$ Lösung der homogenen Dgl, da α ($m = 1$!) Nullstelle der charakteristischen Gleichung ist; somit kann $b_0 e^{\alpha x}$ nicht Lösung einer inhomogenen Dgl mit $s(x) \neq 0$ sein. Damit kann erst $b_0 x e^{\alpha x}$ ein Beitrag zur inhomogenen Dgl bieten. Der Fall $m = 2$ ist ähnlich, denn dann sind $b_0 e^{\alpha x}$ und $x b_0 e^{\alpha x}$ Lösung der homogenen Dgl (α ist einzige Nullstelle der charakteristischen Gleichung, vgl. 2.Fall der homogenen Lösung); somit kann erst die Funktion $b_0 x^2 e^{\alpha x}$ einen Beitrag zur inhomogenen Dgl liefern.
Nun zur speziellen Lösungsmethode für die Dgl. mit Störterm (1.59).

1. Schritt: Nach dem Ansatz formal die Ableitungen y_p' und y_p'' berechnen (m und α sind bekannt!).
2. Schritt: den Term "$e^{\alpha x}$" herauskürzen.
3. Schritt: "Koeffizientenvergleich" und $b_0 \ldots, b_n$ bestimmen.

Wir geben jetzt eine Reihe von Beispielen, um die verschiedenen Möglichkeiten zu untersuchen. Jede Dgl muss für sich betrachtet werden, ein absolutes Rezept gibt es nicht.

Beispiel 1.3.6. *Betrachte die homogene Dgl*

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Damit folgt als charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

und die Nullstellen sind

$$\lambda_1 = 1 \text{ und } \lambda_2 = 2$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl lautet also

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Wir geben jetzt verschiedene Störterme an:

1. $s_1(x) = 2x + 1$ *also Dgl*
$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$$
Somit $\alpha = 0,\ n = 1$ *und* $m = 0$.

2. $s_2(x) = e^{3x}$, *also Dgl*
$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$
Damit $\alpha = 3,\ n = 0$ *und* $m = 0$.

3. $s_3(x) = 2xe^{3x}$, *also Dgl*
$$y'' - 3y' + 2y = 2xe^{3x}$$
Damit $\alpha = 3,\ n = 1$ *und* $m = 0$

4. $s_4(x) = e^{2x}$ *also Dgl*
$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$
Damit $\alpha = 2,\ n = 0$ *und* $m = 1$, *da* $\lambda_2 = \alpha$. *Ansatz:* $y_p(x) = b_0 x^1 e^{2x}$, *also* $y_p'(x) = b_0(1+2x)e^{2x}$ *und* $y_p''(x) = b_0(4+4x)e^{2x}$. *Einsetzen und mit "$e^{-2x}$" durchmultiplizieren liefert:*
$$\underbrace{b_0(4+4x) - 3b_0(1+2x) + 2b_0 x}_{=b_0(4+4x-3-6x+2x)=b_0} = 1$$
und damit $b_0 = 1$. *Die spezielle Lösung lautet*
$$y_p(x) = xe^{2x}$$
und die allgemeine der inhomogenen Dgl
$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^{2x}$$

5. *$s_5(x) = 2x + 1 + e^{2x}$, also Dgl*

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1 + e^{2x}$$

Der Störterm passt nicht in die Form (1.59). Aber man kann $s_5(x) = s_1(x) + s_4(x)$ darstellen. Aus dem 4.Beispiel wissen wir, dass $y_{p_2}(x) = xe^{2x}$ spezielle Lösung zum Störterm s_4 ist. Nun müssen wir noch die spezielle Lösung zum Störterm s_1 finden. Ansatz: $y_{p_1}(x) = b_0 + b_1 x \;\Rightarrow\; y'_{p_1}(x) = b_1$ und $y''_{p_1}(x) = 0$. Einsetzen ergibt

$$0 - 3b_1 + 2b_0 + 2b_1 x = 2x + 1 \;\Rightarrow$$

Koeffizientenvergleich $x^1 : b_1 = 1$ und $x^0 : -3b_1 + 2b_0 = 1 \;\Rightarrow\; b_0 = 2$

Somit ergibt sich als spezielle Lösung:

$$y_{p_1}(x) = 2 + x.$$

Als allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl erhalten wir

$$y(x) = y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (2 + x) + xe^{2x}$$

Die bis jetzt behandelten Formen des Störterms reichen nicht aus! Gerade für Schwingungsbetrachtungen brauchen wir einen Störterm, der die Funktionen "cos" und "sin" enthält. Wir betrachten erneut zwei Fälle

1. Fall: $s(x) = (p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n) e^{\alpha x} \cos \beta x$ und
2. Fall: $s(x) = (p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n) e^{\alpha x} \sin \beta x$

Die beide Fälle sehen dem Fall (1.59) sehr ähnlich, falls man die rechte Seite in komplexen Zahlen ausdrückt:

$$\begin{aligned} \cos \beta x &= \mathrm{Re}(e^{i\beta x}) \\ \sin \beta x &= \mathrm{Im}(e^{i\beta x}) \end{aligned}$$

Wir schreiben den Störterm in einer komplexen Form

$$\hat{s}(x) = (p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

Dann hat man

$$\begin{aligned} s(x) &= \mathrm{Re}(\hat{s}(x)) \text{ im 1.Fall} \\ s(x) &= \mathrm{Im}(\hat{s}(x)) \text{ im 2.Fall} \end{aligned}$$

Der Vorteil liegt auf der Hand: $\hat{s}(x)$ sieht wie $s(x)$ in (1.59) aus. Wir betrachten nun die komplexe Dgl

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = \hat{s}(x) \tag{1.61}$$

Ansatz:

$$\hat{y}_p(x) = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n) x^m e^{(\alpha + i\beta)x}$$

wobei m angibt, wie oft $(\alpha + i\beta)$ Lösung der charakteristischen Gleichung ist, und $b_0, \ldots, b_n$ sind durch Koeffizientenvergleich zu findende Konstanten. Man sieht sofort, dass $m = 0$ ist, falls die Diskriminante $D \geq 0$ ist (solange $\beta \neq 0$), und $m = 1$ sonst. Wir illustrieren den Lösungsweg anhand eines Beispiels.

Beispiel 1.3.7. *Betr. die Dgl*

$$y'' + 4y = \sin 2x \;\Rightarrow\; \textit{homogene Dgl } y_h'' + 4y_h = 0$$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2i \; \lambda_2 = -2i$. *Somit folgt als allgemeine Lösung der homogenen Dgl*

$$y_h(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

Es ist $s(x) = \sin(2x) = Im(e^{i2x})$ *(also 2.Fall). Wir schreiben den komplexen Störterm demgemäß in der Form* $\hat{s}(x) = e^{i2x}$. *Die komplexe Dgl lautet also*

$$y'' + 4y = e^{i2x}$$

Es ist $\alpha + i\beta = 2i = \lambda_1$ *und damit folgt* $m = 1$ *und* $n = 0$. *Als Ansatz erhalten wir*

$$y_p(x) = b_0 x e^{i2x} \;\Rightarrow y_p'(x) = b_0(1 + 2ix)e^{i2x} \;\Rightarrow\; y_p''(x) = b_0(4i - 4x)e^{i2x}$$

Einsetzen in die Dgl und mit “e^{i2x} *kürzen, liefert somit*

$$1 = b_0(4i - 4x) + 4b_0 x = 4ib$$

und damit

$$b_0 = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i$$

Und somit ergibt sich als spezielle Lösung

$$\hat{y}_p(x) = -\frac{1}{4}ixe^{i2x} = -\frac{1}{4}ix(\cos 2x + i\sin 2x)$$

Die spezielle Lösung der reellen Dgl hat dann die Form

$$y_p(x) = Im(\hat{y}_p(x)) = -\frac{1}{4}x\cos(2x)$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x$$

Beispiel 1.3.8. *Zur abschließenden Betrachtung kehren wir wieder zum Anfangsbeispiel der Feder mit Reibung und äußerer Kraft zurück. Dazu sei M die Masse, b die Dämpfungs- oder Reibungskonstante und F_a die äußere Krafteinwirkung. Dann erhalten wir als allgemeine Dgl unter der Annahme $F_a(t) = F \sin \omega t$*

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F\sin(\omega t) \;\Leftrightarrow\; \ddot{y} + \frac{b}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = \frac{F}{M}\sin(\omega t) \tag{1.62}$$

Wie üblich wollen wir verschiedene Fälle untersuchen.

1. *Fall: Keine Dämpfung ($b = 0$) und keine äußere Kraft ($F = 0$): damit erhalten wir aus (1.62) eine homogene lineare Dgl 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten:*

   $$\ddot{y}_h + \frac{k}{M}y_h = 0;$$

   Man setze $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ und löse die charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ zu

   $$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0.$$

   Somit ist $\delta = 0$ und $\omega_e = \sqrt{\frac{k}{M}} = \omega_0$. Die allgemeine Lösung lautet dann

   $$y_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

   oder

   $$y_h(t) = k\cos(\omega_0 t - \theta_h).$$

   Man nennt ω_0 die Kreis- oder Eigenfrequenz.

2. *Fall: Keine Dämpfung ($b = 0$) aber eine äußere Kraft $F \neq 0$. Somit ergibt sich eine inhomogene Dgl*

   $$\ddot{y} + \frac{k}{M} = \frac{F}{M}\sin\omega t.$$

   Der Störterm hat die Form

   $$s(t) = \frac{F}{M}\sin\omega t = \frac{F}{M}Im(e^{i\omega t})$$

   Damit haben wir den 2.Fall vorliegen und wir setzen die komplexe rechte Seite $\hat{s}(t) = \frac{F}{M}e^{i\omega t}$. Hier gibt es erneut zwei Fälle

   (a) *$\omega \neq \omega_0$: es ist $\alpha + i\beta = i\omega$. Damit ist $m = 0$ und $n = 0$. Als besondere Lösung kann man einfach*

   $$y_p(t) = \frac{F}{M(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\omega t$$

   bestimmen. Die spezielle Lösung y_p schwingt gleichphasig wie $F_a(t)$, wenn $\omega_0 > \omega$ und gegenphasig, wenn $\omega_0 < \omega$. Damit ergibt sich als allgemeine Lösung:

   $$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{F}{M(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\omega t$$

(b) $\omega = \omega_0$: *Dann ergibt sich* $\alpha + i\beta = i\omega_0$ *und* $m = 1$ *und* $n = 0$. *Auch hier ergibt sich einfach als spezielle Lösung*

$$y_p(t) = -\frac{F}{2M\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

Die Amplitude nimmt mit der Zeit linear zu; es ist eine aufschaukelnde Schwingung - also eine Resonanz ohne Dämpfung. Allgemeine Lösung:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t - \frac{F}{2M\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

3. *Dämpfung* ($b > 0$) *aber keine äußere Kraft* ($F = 0$). *Als Dgl. erhalten wir eine homogene lineare Dgl.*

$$\ddot{y}_h + \frac{b}{M}\dot{y}_h + \frac{k}{M} y_h = 0$$

Als charakteristische Gleichung ergibt sich

$$\lambda^2 + \frac{b}{M}\lambda + \frac{k}{M} = 0.$$

Somit folgt für den Fall der frei gedämpften Schwingung

$$2\delta = \frac{b}{M} \quad und \; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Wir haben $D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = [a_1^2 - 4a_0^2]$.*Wenn* $D < 0$ *sein soll, muss* $\delta < \omega_0$ *sei. Also*

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Dann lautet diesmal die Eigenfrequenz $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. *Für* $\delta > 0$ *ergibt sich also* $\omega_e < \omega_0$ *Als allgemeine Lösung folgt*

$$y_h(t) = e^{-\delta t}\big(A \cos \omega_e t + B \sin \omega_e t\big) \; oder$$

$$y_h(t) = k e^{-\delta t} \cos(\omega_e t - \theta).$$

4. *Dämpfung* ($b > 0$) *und äußere Kraft* ($F > 0$). *Wir erhalten die endgültig allgemeine Dgl.*

$$\ddot{y}_h + \frac{b}{M}\dot{y}_h + \frac{k}{M} y_h = \frac{F}{M} \sin \omega t$$

Der Störterm lautet:

$$s(t) = \frac{F}{M} \sin \omega t = Im(\frac{F}{M} e^{i\omega t})$$

Erneut befinden wir uns im 2. Fall und wir schreiben die komplexe rechte Seite in der Form $\hat{s}(t) = \frac{F}{M} e^{i\omega t}$. *Es ist* $\alpha + i\beta = i\omega$. *Da* $b > 0$ *ist auch (siehe oben bei Dämpfung* *ohne äußere Kraft) $\delta > 0$ und damit ist $\lambda_1 \neq i\omega \neq \lambda_2$, also $m = 0$ und $n = 0$. Als spezielle Lösung berechnet man*

$$y_p(t) = \frac{F}{M\big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2\big)}\Big((\omega_0^2 - \omega^2)\sin\omega t - 2\delta\omega\cos\omega t\Big)$$

(hier kann $\omega = \omega_0$ oder $\omega \neq \omega_0$ gelten). Auch jetzt lässt sich die spezielle Lösung in der Form

$$y_p(t) = K\cos(\omega t - \theta)$$

darstellen, was zu der allgemeinen Lösung

$$y = y_h + y_p$$

führt, wobei y_h die allgemeine Lösung des Falles Dämpfung ohne äußere Kraft darstellt. Man sieht also, dass die allgemeine Lösung eine Überlagerung ist:

- *gedämpfte Schwingung mit Kreisfrequenz ω_e*
- *ungedämpfte Schwingung mit Kreisfrequenz ω*

Man kann y_h als freie Schwingiung betrachten - ein flüchtiger Anteil, der mit der Zeit (wegen der Dämpfung) verschwindet. Dagegen ist y_p die erzwungene (durch die äußere Kraft) Schwingung, dessen Anteil stationär wird, da die Amplitude konstant bleibt. Solange y_h noch bemerkbar ist, kann man von einem Einschwingvorgang reden. Gibt es auch hier eine Resonanz? Nach dem Einschwingvorgang erhält man eine Amplitude der Größe

$$K = \frac{F}{M\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

Man kann von Resonanz sprechen, wenn bei konstanten Vorgaben M, F, k, b die Amplitude $K(\omega)$ (also von der Kreisfrequenz ω abhängig) maximal wird. Dies ist die Resonanzkreisfrequenz ω_r. Da der Zähler konstant ist, wird $K(\omega)$ maximal, wenn der Nenner minimal wird, also der Radikant minimal wird. Daher leiten wir ab:

$$\frac{b}{d\omega}\big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2\big) = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\delta^2\omega = 0 \;\Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 = 2\delta^2 \;\Rightarrow$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Damit kommt es zu einer Resonanz, wenn $\omega_0 > \sqrt{2}\delta$. Allerdings ist $\omega_r < \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ der frei gedämpften Schwingung. Nur wenn $\delta = 0$ (also keine Dämpfung) ist $\omega_r = \omega_e = \omega_0$. Setzt man ω_r ein, so erhalten wir als maximale Amplitude

$$K_r = \frac{F}{2M\delta\omega_e}.$$

Methode nach Heaviside

Wir wollen noch eine Methode betrachten, inhomogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung zu lösen. Dabei muss man jeweils die Voraussetzungen untersuchen. Es ist eine sehr heuristische Methode. Wir wollen es anhand eines Beispiels erläutern.

Beispiel 1.3.9. 1. *Gesucht ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung*

$$y'' + y = x^2 \tag{1.63}$$

Zuerst bestimmen wir wie gehabt mit der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzialgleichung:

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Nun schreiben wir $D = \frac{d}{dx}$ *als einfacher Differenzialoperator - also* $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$. *Damit können wir (1.63) in der Form*

$$y'' + y = D^2 y + y = (D^2 + 1)y = x^2 \tag{1.64}$$

Also lösen wir nach y *auf*

$$y = (D^2 + 1)^{-1}(x^2) \tag{1.65}$$

Somit ist aber (1.65) nur eine formale Schreibweise von (1.63). Nun nimmt man D *als eine Zahl und entwickelt es in einer Reihe, der geometrischen Reihe, in dem man* $q = -D^2$ *setzt.*

$$(D^2 + 1)^{-1} = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D^{2n} = id - D^2 + D^4 + \ldots$$

Dies wenden wir auf die Funktion "x^2*" an, und beachten, dass* D^{2n} *die* $2n$*-te Ableitung ist. Also*

$$y(x) = (D^2 + 1)^{-1}(x^2) = (id - D^2 + D^4 + \ldots)(x^2) = x^2 - 2 \tag{1.66}$$

Damit erhalten wir als allgemeine Lösung von (1.63)

$$y_{all}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$$

Nun hätte man dies auch mit den alternativen Methoden lösen können.

2. *Wir wollen nun eine Differenzialgleichung mit der obigen Methode betrachten, die wir vorher noch nicht lösen konnten*

$$y'' + y = \ln x, x \in]0, 2[\tag{1.67}$$

Wir gehen gleich analog zu (1.65) vor und schreiben analog auf

$$y = (D^2 + 1)^{-1}(\ln x), x \in]0, 2[\tag{1.68}$$

Also

$$y(x) = (id - D^2 + D^4 - \ldots)(\ln x) = \ln x-$$

Man kann also allgemein die Methode darstellen: Sei die lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = s(x) \tag{1.69}$$

gegeben.

1. *Zuerst schreiben wir den Operator auf der linken Seite um*

   $$(D^2 + a_1 D + a_0)y = s(x)$$

   und lösen auf

   $$y(x) = (D^2 + a_1 D + a_0)^{-1}(s(x))$$

2. *Nun wird wieder D als Zahl angesehen. Statt D wird somit q geschrieben und mittels Partialbruchzerlegung in zwei Brüche ausgedrückt (hier setzen wir zwei verschieden reelle λ voraus, der allgemeine Fall kann durch Transformation darauf zurückgeführt werden)*

   $$\frac{1}{a_0 + a_1 q + q^2} = \frac{A}{\lambda_1 - q} + \frac{B}{\lambda_2 - q}$$

   Jeder Bruch auf der rechten Seite wird mittels geometrischer Reihe entwickelt.

3. *Erneut wird q nun durch D ersetzt und die Reihe auf $s(x)$ angewendet.*

4. *Damit die sich ergebene Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n(s(x)$ konvergiert, muss $D^n(s(x))$ für alle $x \in \mathbb{D}_s$ eine Nullfolge bilden. Nicht jede Stöirfunktion genügt dieser notwendigen Bedingung, aber sie wird natürlich von allen Polynomen erfüllt. Die Methode ist also eine gangbare Alternative zur Methode durch die Ansatzfunktion, beschrieben in vorherigen Unterabschnitt.*

Abbildung 1.1: Olivier Heaviside (1850-1925); Quelle: Smithsonian Libraries

1.3.2 Spezielle lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung - Euler-Gleichung

Im Abschnitt über lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten koeffizienten, haben wir eine Lösungsmethode für homogene wie inhomogene Gleichungen entwickelt. Die obige Zusammenfassung gibt verschiedene Typen von Differenzialgleichungen an, deren Koeffizienten von y, y' und y'' nicht mehr konstant sind. Allgemeine Lösungsmethoden lassen sich dafür nicht mehr angeben. Allerdings gibt es sogar für lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung mit speziellen Koeffizientenfunktionen eine Lösungsmethode. Diese Klasse von linearen Differenzialgleichungen nennt man *Euler-Dgl.*. Sie haben das Aussehen

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \tag{1.70}$$

wobei $n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall). Es gibt grundsätzlich zwei Methoden durch Substitution eine Lösung zu bestimmen. Wir beginnen mit dem direkten Ansatz:

$$y(x) = x^\lambda. \tag{1.71}$$

Wir leiten ab: $y'(x) = \lambda x^{\lambda-1},\ y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$ usw. Man setzt dies in die homogene ($f(x) = 0$) Euler-Differenzialgleichung (1.70) ein und faktorisiert "x^λ" aus und erhält eine Polynom-Gleichung $p(\lambda) = 0$. Dabei sucht man die Nullstellen und erhält ein Fundamentalsystem wie bei der linearen Differenzialgleichung 2. Ordnung. Dabei muss entsprechend der Fälle das maximale Lösungsintervall einschränkt werden.

Nullstelle der charakt. Gleichung	Lösung im Fundamentalsystem
$\lambda = a$ (einfache Nullstelle)	$y(x) = x^a$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = a$ ($k-$fache)	$x^a,\ (\ln x)x^a, \ldots (\ln x)^{k-1}x^a$
$\lambda_{1,2} = a \pm ib$ Konjugiert komplexe Nullstelle	$y_1(x) = x^a \sin(\ln x^b), y_2(x) = x^a \cos(\ln(x^b)$
$\lambda_1 = \ldots \lambda_k = a + ib$ $\lambda_{k+1} = \ldots \lambda_{2k} = a + ib$	$x^a \sin(\ln x^b), x^a(\ln x)\sin(\ln x^b), \ldots x^a(\ln x)^{k-1}\sin(\ln x^b)$ $x^a \cos(\ln x^b), x^a(\ln x)\cos(\ln x^b), \ldots x^a(\ln x)^{k-1}\cos(\ln x^b)$

Wie bei der linearen Differenzialgleichung kann man nur bestimmte Inhomogenitäten behandeln (hier $f(x) = x^\alpha(\ln x)^m,\ f(x) = x^\alpha(\ln x)^m \sin(x)(\ln x)^\beta$ bzw. $f(x) = x^\alpha(\ln x)^m \cos(x)(\ln x)^\beta)$. Man setzt $\mu = \alpha + i\beta$. Wie im linearen Fall zeigt die Vielfachheit m an, wie oft die Nullstelle λ des charakt. Polynom p mit dem Exponent μ übereinstimmt. Dabei geht man nach dem folgenden Muster vor (hierbei sind $P_i(\ln x),\ R_j(\ln x)$ Polynome mit Variable "$\ln x$" statt "x")

Inhomogenität - rechte Seite	μ	Ansatz
x^α	α	$C(\ln x)^m x^\alpha$
$P(\ln x)x^\alpha$	α	$(\ln x)^m R(\ln x)x^\alpha$
$P_1(\ln x)\sin(\ln x^\beta) + P_2(\ln x)\cos(\ln x^\beta)$	$i\beta$	$(\ln x)^m \Big(R_1(\ln x)\sin(\ln x^\beta) + R_2(\ln x)\cos(\ln x^\beta)\Big)$
$x^\alpha\Big(P_1(\ln x)\sin(\ln x^\beta) + P_2(\ln x)\cos(\ln x^\beta)\Big)$	$\alpha + i\beta$	$(\ln x)^m x^\alpha \Big(R_1(\ln x)\sin(\ln x^\beta) + R_2(\ln x)\cos(\ln x^\beta)\Big)$

Nun betrachten wir den zweiten Zugang. Hier verwenden wir folgende Substitution: $x = e^t$ und damit $t = \ln x$. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} =,\ y'' = \frac{d}{dx}(\dot{y}\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\dot{y},\ \text{somit } x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y} \text{ usw.}$$

Wir wollen das Vorgehen kurz zusammenfassen.

1. Zuerst wird die obige Substitution verwendet und aus den Ableitungen nach "x" die nach "t" verwendet (mit dem "*dot*" bezeichnet). Also

$$\begin{aligned} xy' &= \dot{y} \\ x^2y'' &= \ddot{y} - \dot{y} \\ x^3y''' &= \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} \text{ usw.} \end{aligned}$$

   Dabei haben wir für die Funktion nach "x" wie für die nach "t" das gleiche Symbol "y" verwendet.

   Auf der rechten Seite wird das Argument "x" von f durch e^t ersetzt.

   Nun muss man in (1.70) einsetzen und sortieren, damit man eine lineare Differenzialgleichung $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhält.

2. Nun löst man die Dgl nach den bekannten Mitteln.

3. Danach führt man die Rücktransformation $t = \ln x$ aus.
4. Schließlich bleiben bei einem AWP nur noch die Konstanten zu ermitteln.

Beispiel 1.3.10. *1. Man löse $y'' - \frac{2}{x^2}y = 40x^5$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$ mit Hilfe des zweiten Ansatzes.*

Zuerst bringen wir sie auf die Normalform (1.70), in dem wir mit “x^2 multipilzieren.

$$x^2y'' - 2y = 40x^7$$

Nun werden die Ableitung nach der Substitution mit $x = e^t$ eingesetzt (dabei beachte man, dass $x > 0$ gilt).

$$x^2\frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y}) - 2y = 40e^{7t} \Leftrightarrow \ddot{y} - \dot{y} - 2y = 40e^{7t}$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \ \lambda_1 = -1 \text{ und } \lambda_2 = 2$$

Somit erhalten wir für die lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten ein Fundamentalsystem

$$y_1(t) = e^{-t} \text{ und } y_2(t) = e^{2t}$$

Aus dem Ansatz für die spezielle Lösung für die inhomogene Dgl. bekommt man

$$y_p(t) = e^{7t}$$

Also sieht die allgemeine Lösung der transformierten Gleichung aus:

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + e^{7t}$$

Die Rücktransformation liefert:

$$y(x) = C_1x^{-1} + C_2x^2 + x^7$$

Wir leiten nun ab und erhalten

$$y'(x) = -C_1x^{-2} + 2C_2x + 7e^6$$

Einsetzen der Anfangswerte bedeutet

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 + 1 \\ 2 &= -C_1 + 2C_2 + 7 \end{aligned}$$

Auflösen liefert: $C_1 = 1$ und $C_2 = -2$. Die Lösung des AWP lautet damit

$$y(x) = x^{-1} - 2x^2 + x^7$$

2. *Mit dem ersten Ansatz löse man*

$$x^2y'' - 2y = 40x^7, \; y(1) = 0, \; y'(1) = 2$$

a) *Man setze die Substitution $y = x^\lambda$ in die homogene Gleichung ein und erhält*

$$x^2(\lambda - 1)\lambda x^{\lambda-2} - 2x^\lambda = 0$$

und somit

$$\lambda(\lambda - 1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

b) *Als Nullstellen erhalten wir: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.*

c) *Somit haben wir als Fundamentalsystem $y_1(x) = x^2$ und $y_2(x) = \frac{1}{x}$.*

d) *Wie bei der linearen Dgl. 2 Ordnung mit konstanten Koeffizienten vergleicht man den Exponenten der rechten Seiten - hier $k = 7$ - und erkennt, dass er nicht Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Damit ist $m = 0$ und man wählt den Ansatz für die spezielle Lösung: $y_p(x) = Cx^7$. Eingesetzt ergibt dies*

$$C \cdot 7 \cdot 6 \cdot x^5 - 2Cx^7 = 40x^7 \;\Leftrightarrow\; C = 1$$

Somit erhalten wir als allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1x^2 + C_2\frac{1}{x} + x^7$$

e) *Die noch nicht spezifizierten Konstanten erhält man durch Einsetzen der Anfangsbedingungen. Dabei ergibt sich $C_1 = -2$ und $C_2 = 1$, also als Lösung*

$$y(x) = -2x^2 + \frac{1}{x} + x^7$$

3. *Man bestimme die Lösung zu*

$$(x - 1)^2y'' - 3(x - 1)y' + 4y = 0$$

Hier haben wir eine Variante vorliegen: Die Rolle von "x" übernimmt jetzt "$x - 1$" oder allgemein "$x - x_0$". Das Lösungverfahren läuft genauso ab - man muss nur überall statt "x" die Substitution "$x - 1$" (oder allgemein "$x - c_0$") verwenden. Beim zweiten Verfahren substituiert nun $t = \ln(x - 1)$ oder aufgelöst $x = e^t + 1$.

Wir verwenden nun den ersten Ansatz und substituieren $y(x) = (x - 1)^\lambda$ also $y'(x) = \lambda(x - 1)^{\lambda-1}$, $y''(x) = \lambda(\lambda - 1)(x - 1)^{\lambda-2}$

a) *Eingesetzt und ausgeklammert folgt:*

$$(x - 1)^\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$$

b) *Als Nullstellen ergibt sich (doppelt):* $\lambda_{1,2} = 2$

c) *Entweder ein Blick in die Tabelle oder, wenn wie man im Fall der linearen Dgl. 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten weiss, muss man einen Faktor vor einer Fundamentalfunktion wählen:*

$$\begin{aligned} y_1(x) = (x-1)^2 \textit{ und } y_2(x) &= (x-1)^2 \ln(x-1) \textit{ falls } x > 1 \\ \textit{bzw. } y_2(x) &= (x-1)^2 \ln|x-1| \textit{ für } x < 1 \end{aligned}$$

1.3.3 Spezielle Differenzialgleichungen 2.Ordnung - Eine Zusammenfassung

In der folgenden Liste werden wir nur die Typen von verschiedenen gewöhnlichen linearen Differenzialgleichungen 2.Ordnung und deren Formen bzw dazugehörige Lösungen angeben und nicht näher auf Techniken und Theorien eingehen. Hierbei sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ und $m, k \in \mathbb{N}_0$.

1. *Kummersche Dgl.*:

$$xy'' + (\alpha - x)y' - \beta y = 0$$

Lösung:

$$\Phi(\alpha, \beta, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n+1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n+1)} x^n$$

2. *Tschebyscheff Dgl.*:

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0$$

Lösung:

$$T_m(x) = \sum_{n=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{m}{2n} x^{m-2n} (-1)^n (1-x^2)^n$$

(Tschebyscheff -Polynom).

3. *Gauš sche Dgl*:

$$x(1-x)y'' + \Big((\alpha+\beta+1) - \gamma\Big)y' + \alpha\beta y = 0$$

Lösung:

$$F(\alpha, \beta, x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{(n+1)!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}$$

4. *Laguerre-Dgl.*:

$$xy'' + (1-x)y' + my = 0$$

Lösung:

$$L_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!} \binom{m}{n} x^n = \frac{e^x}{m!} \frac{d^m(e^{-x}x^m)}{dx^m}$$

(Laguerresche Polynome)

5. *Dgl. der Laguerreschen Funktionen*:

$$xy'' + y' + (\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - m)y = 0$$

Lösung:

$$Z_m = e^{-\frac{x}{2}} L_m$$

(Laguerrefunktionen).

6. *Verallgemeinerte Laguerresche-Dgl.*:

$$xy'' + (k + 1 - x)y' + my = 0$$

Lösung:

$$L_m^k = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!} \binom{m+k}{n+k} x^n = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{m+k}$$

7. *Legendre-Dgl*:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + m(m + 1)y = 0$$

Lösung:

$$P_m = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m[(x^2 - 1)^m]}{dx^m}$$

(Legendre-Polynome)

8. *verallgemeinerte Legendre-Dgl.*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \Big(m(m + 1) - \frac{k^2}{1 - x^2}\Big)y = 0$$

Lösung:

$$P_m^k(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^k}{dx^k} P_m(x)$$

(verallgemeinerte Legendre-Polynome).

9. *Bessel-Dgl.*:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$$

Lösung:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{m+2n}}{2^{m+2n} n!(n + m)!}$$

(Besselfunktionen).

10. *Hermite-Dgl*:
$$y'' + 2xy' + 2my = 0$$
Lösung:
$$H_m(x) = -1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^m(e^{-x^2})}{dx^m}$$
(Hermitesche Polynome).

11. *Dgl. der Hermitefunktionen*:
$$y'' + 2(m + 1 - x^2)y = 0$$
Lösung:
$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)$$
(Hermitefunktionen)

1.3.4 Übung

1. (Kettenlinie) Ein homogenes, biegsames Seil hängt frei ohne Belastung durch. Für die resultierende Kurve $y(x)$ des Seils gilt

   $y'' = a\sqrt{1 + y'^2}$, wobei $a = \dfrac{q}{H}$ = spezifische Längenbelastunghorizontale Spannkraft

   Man bestimme die allgemeine Lösung.

2. Man löse die folgenden Differenzialgleichungen 2. Ordnung allgemein.
   (a) $3y'' + 2y' - y = 2\sin x$
   (b) $4y'' + 3y' - y = 25 - x^2$
   (c) $9y'' - y = x \sin x$
   (d) $\ddot{x} - \dot{x} + 2x = t^2 - 8e2t$

3. Nicht jede lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten ist vom Euler-Typ. Daher verwendet man einen Ansatz mit einem Parameter und versucht durch Einsetzen in die Dgl. ihn zu bestimmen.

   Dazu betrachte man die Dgl.
$$x^2y''' + 2xy'' - 2y = 0$$
   und setzte $y = x^\alpha$ an. Man erhält ein Polynom in α.
   (a) Wie viele Nullstellen hat das Polynom und welche? Was bedeutet diese?
   (b) Welche Lösungen erhält man? Wie sieht die allgemeine Lösung aus?

(c) Man betrachte nun das AWP $y(1) = a_0,\ y'(1) = a_1,\ y''(1) = a_2$ mit vorgegebenen $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Man bestimme die spezielle Lösung zum AWP in Abhängigkeit der vorgegebenen $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Ist sie eindeutig?

4. (Verfolgungskurve) Im Punkt $A(10, a)$ steht ein Hund an einem reiß end fließ enden Fluss. Er sieht sein Herrchen am anderen Ufer im Punkt $(0, 0)$ springt ins Wasser und strampelt darauf los, die Schnauze immer auf sein Herrchen gerichtet. Der Fluss ist 10[m] breit, die Wassergeschwindigkeit beträgt $w = 2x(1 - x)$. Die Geschwindigkeit des Hundes ist im Wasser an den Ufern $v = 10$

   (a) Man leite die Dgl der Bahnen ab,

   $$\left(2x(1-x)\sqrt{x^2+y^2} - vy\right) + vxy' = 0$$

   und löse das Anfangswertproblem $y(1) = a$ mit der Substitution $y(x) = xu(x)$

   (b) Wie lange braucht der Hund von A nach $O = (0, 0)$, fallas $a = 0$?

   (c) An welchem Punkt A muss er ins Wasser springen, um schnellstens gestreichelt zu werden?. Wieviel Zeit gewinnt er? ($\int_0^1 \cosh x^2 dx = 1.1044737938,\ \int_0^1 \sinh x^2 dx = 0.357913806$)

5. Ein Massenpunkt wird auf der x-Achse gemäß $x\ddot{x} = 3\dot{x}^2$ beschleunigt. Es gelte $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 2$. Zu welcher Zeit t_0 gilt $\lim_{t\to t_0-} x(t) = \infty$. Man skizziere die Phasenbahn $x(t)$ und $v(t)$.

6. Man betrachte die Differenzialgleichung $x\ddot{x} + \dot{x}^2 - 0 = 0$. und bestimme für $v = \dot{x}$ und $v'(x) = \frac{dv}{dx}(x)$

   (a) die Phasen-Differenzialgleichung $f(x, v, v') = 0$;

   (b) die allgemeine Lösung dieser Dgl (Phasenportrait der Bewegung);

   (c) die Phasenbahn für das AWP $x(0) = A > 0,\ \dot{x}(0) = 0$;

   (d) den Verlauf dieser Auslenkung $x = x(t)$.

   (e) Wie steht es um die Existenz und Eindeutigkeit für das AWP $x(0) = 0,\ \dot{x} = v_0$?

   (f) Man rechne nach: die Lösungen, deren Phasenbahn eine geschlossene Ellipse darstellt, sind *harmonische Schwingungen, deren Schwingungsdauer linear mit der Amplitude wächst.*

7. Gegeben ist eine Reihenschaltung eines konstanten Widerstandes $R = 2\Omega$, eines Kondensators mit
$C = \frac{4}{29}$farad, einer Induktionsspule mit $L = 1$ und einer Stromquelle mit zeitabhängiger Spannung $V(t)$.

Es gelten die Kirchhoff'schen Gesetze für Kondensatorladung $Q(t)$, Stromstärke $I(t)$ und Spannung $V(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt}(t) &= I \\ V(t) - RI(t) - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}Q(t) &= 0 \end{aligned}$$

Die Spannung sei gemäß $V(t) = 1$ $[Volt]$ gegeben. Daraus ergibt sich die Differenzialgleichung 2.Ordnung für $Q(t)$

$$\frac{d^2Q}{dt^2}(t) + 2\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{29}{4}Q(t) = 1. \tag{1.72}$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung für $Q(t)$ der Differenzialgleichung (1.77) an.

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangswerten $Q(0) = 0, I(0) = 0$.

(c) Welche Stromstärke $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$ ergibt sich asymptotisch für $t \to \infty$?

(d) Zeichnen Sie die Lösung Q im Bereich $0 \leq t \leq \pi$.

8. Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 6y' + 10y = s(x)$$

(a) Berechnen Sie die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung .

(b) Es sei $s(x) = e^{(2+a)x} \cdot \sin(ax)$. Bestimmen Sie die Ansatzfunktion zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in Abhängigkeit vom Parameter a.

(c) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung für $a = 0$ und geben Sie die allgemeine Lösung an.

(d) Berechnen Sie die spezielle Lösung für die Anfangswerte $x_0 = 0$, $y(x_0) = 3$ und $y'(x_0) = 0$.

9. Man betrachte die so genannte Duffing-Differenzialgleichung $\ddot{x} + (1 + \sqrt{2})x - x^3 = 0$. Sie beschreibt einen mechanischen Ozillator mit weicher Feder. Dabei nimmt die Rückstellkraft F mit wachsender Auslenkung x zuerst zu dann aber monoton ab gemäß

$$F = F(x) = (1 + \sqrt{2})x - x^3$$

Man bestimme für $v = \dot{x}$ und $v'(x) = \frac{dv}{dx}(x)$

(a) die Phasen-Differenzialgleichung $f(x, v, v') = 0$;

(b) die allgemeine Lösung dieser Dgl (Phasenportrait der Bewegung);

(c) die Phasenbahn für das AWP $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -1$;

(d) den Verlauf dieser Auslenkung $x = x(t)$.

10. Es sei $a > 0$. Gegeben sei die lineare inhomogene Differenzialgleichung 2.Ordnung

$$a^2 y'' + y = \sin(2x)$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung in Abhängigkeit von $a > 0$ an.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogene Differenzialgleichung in Abhängigkeit von $a > 0, a \neq \frac{1}{2}$.

(c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogene Differenzialgleichung für $a = \frac{1}{2}$.

(d) Bestimmen Sie nun für $a = \frac{1}{2}$ die spezielle Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ an (benutzen Sie die allgemeine Lösung aus Teil c)) .

(e) Für welche $a > 0$ sind die Lösungen beschränkt und für welche unbeschränkt.

11. Gegeben ist die Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + ay' + 4y = s(x)$$

(a) Für welche Werte von a hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + 4 = 0$$

i. zwei reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$?

ii. eine doppelte reelle Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2$?

iii. zwei konjugiert komplexe Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$?

(b) Geben Sie jeweils die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und die Ansatzfunktion der partikulären Lösung y_p an, für:

i. $a = 5$ und $s(x) = x \cdot e^{-x}$

ii. $a = -4$ und $s(x) = e^{2x}$

iii. $a = 0$ und $s(x) = 24 \cdot \sin(4x)$

(c) Berechnen Sie für $a = 0$ und $s(x) = 24 \cdot \sin(4x)$ (siehe Aufgabenteil 4b,iii) die allgemeine Lösung und die spezielle Lösung für die Anfangswerte $y(0) = 3$ und $y'(0) = 0$.

12. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $a_0, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie $a_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Auf $I \times \mathbb{R}$ seien die folgenden Differenzialgleichungen gegeben:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (1.73)$$

$$y'' + q(x)y = h(x) \qquad (1.74)$$

wobei $q = a_0 - \frac{1}{2}a_1' - \frac{1}{4}a_1^2$ und $h = fe^{\frac{1}{2}A_1}$ mit $A_1(x) = \int_{x_0}^x a_1(s)ds$.

Zeigen Sie die Äquivalenz von (1.73) und (1.74).

(Hinweis: Betrachten Sie $z(x) = e^{\frac{1}{2}A_1(x)}y(x),\ (x \in I)$.)

13. * Für $R > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ sei

$$K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$$

Man zeige

(a) Für $r > 1$ ist das Bild von $K_r(0)$ unter der so genannten *Zukovskii-Abbildung*

$$z \longmapsto z + \frac{1}{z}$$

eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$, den Halbachsen $a = r + \frac{1}{r},\ b = r - \frac{1}{r}$ und den Brennpunkten $(-2, 0), (2, 0)$. Eine solche Ellipse wird unter der Abbildung

$$w \longmapsto w^2$$

um 2 verschoben.

(b) Jede Ellipse, deren einer Brennpunkt $(0, 0)$ ist, ist das Quadrat einer geeigneten (eindeutig bestimmten) Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)$.

(c) Ist $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbar nicht triviale Funktion mit

$$w''(t) = -w(t)\ (t \in \mathbb{R}) \tag{1.75}$$

so gibt es ein $\gamma > 0$ mit $|w'(t)|^2 + |w(t)|^2 = \frac{1}{4}\gamma\ (t \in \mathbb{R})$.

(d) Ist w wie in (c) und

$$g(t) = \int_0^t |w(s)|^2 ds\ (t \in \mathbb{R})$$

so hat $z(\tau) = w^2(g^{-1}(\tau))\ (\tau \in \mathbb{R})$ die Eigenschaft

$$z''(t) = -\gamma\frac{z}{z^3}. \tag{1.76}$$

(e) Begründen Sie, dass jedes Anfangswertproblem für die auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ betrachtete Dgl. (1.76) genau eine maximal fortgesetzte Lösung besitzt.

Bemerkung: Da jede Bewegung eines Massenpunktes, der dem Newtonschen Gravitationsgesetz genügt, aufgrund des Drehimpulserhaltungsgesetzes in einer Ebene verläuft, folgt hieraus:

Die Bewegung eines solchen Punktes ist bei negativer Gesamtenergie eine Ellipse, deren einer Brennpunkt die anziehende Masse ist.

In der Tat: Jede solche Ellipse ist nach (b) eine Ellipse mit Mittelpunkt 0, also Lösung der Hookschen Gleichung (1.75), mithin ihr Quadrat (nach (e) eine Ellipse deren einer Brennpunkt 0 ist) nach (d) eine Lösung von (1.76). Nach (e) gibt es (nach Festlegung von Anfangsbedingungen) keine weitere Lösungen.

Diese Methode, das Keplerproblem zu lösen, stammt von dem schwedischen Astronom K. Bohlin (1911).

14. Gegeben sei das AWP in $]1,\infty[\times\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2(1-x)y'' \quad &+ \quad 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = 0 \\ y(2) = 0, \qquad & \qquad y'(2) = 1 \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie eine Lösung der Dgl. vom Typ $y(x) = x^\alpha$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Lösen Sie das AWP.

15. Ein (schnell) schmelzender Eisklotz der Anfangsmasse m hängt an einer Feder, auš erdem gibt es noch eine geschwindigkeitsabhängige Reibung. Bei geeigneter Wahl der Gröš en kann sich dabei folgende Differentialgleichung für das schwingende System ergeben:

$$\ddot{s} + 2\dot{s} + 5s = 10 - 5t$$

   (a) Berechnen Sie die allgemeine homogene Lösung $s_h = s_h(t)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

   (b) Berechnen Sie die Gesamtlösung (allgemeine Lösung) $s = s(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung.

   (c) Berechnen Sie die spezielle Lösung für die Anfangswerte:

$$t_0 = 0, s(t_0) = 1, \dot{s}(t_0) = 0$$

   .

16. Ein Ozeanriese ($m = 10^8$kg) fährt mit einer Geschwindigkeit von $\dot{x}(0) = 10[m/s]$. Plötzlich setzen die Motoren aus und das Schiff wird nur noch durch die Wasserreibung langsamer. Nehmen wir nach dem Stokeschen Gesetz $F = 6\pi\eta r\dot{x}$ eine geschwindigkeitsabhängige Reibung mit $\mu = 0,001$ an, so wird aus der Dgl.

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = -\mu m g$$

bei vereinfachen Annahmen über die Dimensionen des Schiffes

$$\ddot{x} + 0,0016\dot{x} = -0,01$$

   (a) Man löse die Dgl. allgemein ($x_h, x_p,\ x = x_h + x_p$).

(b) Man gebe die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen der Aufgabe ($x(0) = 0, \dot{x}(0) = 10$) an.

(c) Nach welcher Zeit T_0 kommt das Schiff zum Stillstand?

(d) Welcher Weg $x(T_0)$ hat es dann zurückgelegt?

17. Gegeben ist eine Federung mit Reibung, dessen Bewegung $x(t)$ der Differenzialgleichung

$$3\ddot{x}(t) - 6\dot{x}(t) + \frac{9}{4}x(t) = 27\cos t. \tag{1.77}$$

gehorcht

(a) Man gebe die allgemeine Lösung für $x(t)$ der Differenzialgleichung (1.77) an.

(b) Man bestimme die spezielle Lösung zu den Anfangwerten $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.

(c) Gibt es Resonanz für die spezielle Lösung $x_s(t)$ und was ergibt sich asymptotisch für $t \to \infty$?

18. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $g, k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $h : \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $h(X) \neq 0$ auf I. Man zeige, dass das Problem der Lösung der auf $I \times \mathbb{R}$ gegebenen Dgl.

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$$

äquivalent ist zu dem Problem der Bestimmung der Nullstellenfreien Lösungen einer homogenen linearen Dgl. 2. Ordnung

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$$

mit geeigneten Funktionen $f_1, f_2, f_3 : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

19. Eine Rakete steigt senkrecht von der Erde auf. Nach dem Abschalten der Triebwerke genügt die Entfernung der Rakete zum Erdmittelpunkt der Differenzialgleoichung

$$y'' = -g\frac{1}{y^2}, \tag{1.78}$$

wobei $g > 0$ die Erdbeschleunigung sei. Sei $y : [0, T[\longrightarrow]0, \infty[$ eine Lösung von (1.78) mit $0 < T < \infty$.

(a) Man zeige, dass die Energie des Systems erhalten bleibt, d.h. es gibt eine Konstante $E \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{y'(t))^2}{2} - g\frac{1}{y(t)} = E, \quad \text{für alle } t \in [0, T[$$

(b) Man zeige mit a):

   i. Ist $E < 0$, so gilt $y(t) \leq \frac{g}{E}$ für alle $t \in [0, T[$.

   ii. Ist $E > 0$ und $y'(0) > 0$, so gilt $y(t) \geq x(0) + t\sqrt{2E}$ für alle $t \in [0, T[$. Unter der Annahme $T = \infty$ bestimme man $\lim_{t\to\infty} y(t)$

20. (Fortsetzung der vorherigen Aufgabe) Sei $t_0 \in \mathbb{R},\ t_0 < T$. Eine Lösung $y : [t_0, T[\longrightarrow \mathbb{R}$ des AWP
$$y' = f(t.y),\ y(t_0) = y_0$$
heiß t *maximal*, wenn es keine Lösung $z : [t_0, T'[\longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, die y fortsetzt und $T' > T$ gilt.

Seien $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ und $y : [0, T[\longrightarrow]0, \infty[$ eine maximale Lösung des AWP
$$y'' = -\frac{g}{y^2},\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta$$
mit $g > 0$. Man beweise:

(a) $\beta \leq 0 \ \Rightarrow\ T < \infty$.

(b) $E < 0 \ \Rightarrow\ T < \infty$ mit $E = \frac{y'^2}{2} - \frac{g}{y}$ (E gemäš vorheriger Aufgabe konstant). (Hinweis: Widerspruchsbeweis. Man zeige, dass im Fall $T = \infty$ der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} y(t) = a \in]0, \infty]$ existiert und führe die Fälle $a = \infty$ und $a < \infty$ zum Widerspruch).

(c) $T = \infty \ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$.

Bemerkung. Aus (a) und (b) folgt
$$T = \infty \ \Rightarrow\ E \geq 0,\ \beta > 0.$$
Die umgekehrte Richtung, also $(E \geq 0, \beta > 0) \Rightarrow\ T = \infty$ gilt ebenfalls; dies braucht aber hier nicht bewiesen zu werden.

21. Es seien $I \subset]0, \infty[$ ein Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Die auf $I \subset \mathbb{R}$ betrachtete Dgl.
$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = f(x) \tag{1.79}$$
nennt man inhomogene Eulersche Dgl. 2 Ordnung.

(a) Zeigen Sie mittels der Herleitung im Skript, dass das Problem einer Lösung der Dgl. (1.79) äquivalent ist dem der Lösung einer geeigneten inhomogenen linearen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl.
$$4x^2 y'' + x y' + y = 4 \ln x$$

22. Bestimmen Sie für $x > 0$ ein Fundamentalsystem von

$$x^4 y^{(4)} + 6x^3 y''' + 7x^2 y'' + xy' - y = 0$$

23. Man löse mit dem zweiten Ansatz allgemein

$$3x^2 y'' + 2xy' - 4y = 4 \ln x$$

24. Man bestimme die Lösung

$$x^2 y'' + xy' + 4y = \sin(2\ln(-x)),\ y(-e^{\pi}) = -\frac{\pi}{4},\ y'(-e^{\pi}) = \frac{1}{4}e^{-\pi}$$

1.4 Rand- und Eigenwertprobleme

Bei einem *Randwertproblem* handelt es sich um eine Dgl. mindestens zweiter Ordnung, bei der an mindestens zwei verschiedenen $x-$Stellen $y-$Werte vorgegeben sind. Randwertaufgaben haben wir bereits in den Grundlagenvorlesungen behandelt. Dazu zwei kurze einführende Beispiele:

Beispiele:

1. Wir betrachten die Dgl zweiter Ordnung

$$y'' + y = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser einfachen linearen homogenen Dgl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Dann gibt es zur Bestimmung einer speziellen Lösung die Möglichkeit, Werte an zwei verschiedenen $x-$Werten vorzugeben. Man betrachtet z.B.

(a) das Intervall $[0, 1]$ und die Angabe von *Randwerten* $y(0) = 0$ und $y(1) = 1$. Dann ergibt sich genau eine Lösung mit $C_1 = 0$ und $C_2 = \frac{1}{\sin 1}$

(b) das Intervall $[0, \pi]$ und die Angabe von *Randwerten* $y(0) = 1$ und $y(\pi) = -1$. Dann ergeben sich unendliche viele Lösungen mit $C_1 = 1$ und $C_2 \in \mathbb{R}$.

(c) das Intervall $[0, \pi]$ und die Angabe von *Randwerten* $y(0) = 1$ und $y(\pi) = 0$. Dann ergeben sich keine Lösungen.

2. *Kettenlinie* An zwei Punkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 < x_2$ werde ein Seil (Kette) befestigt, das frei durchhängt. Es ist homogen und beliebig biegsam. Dann lautet das Randwertproblem

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2},\ y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$$

Der Wert $a > 0$ hängt von der Materialstruktur des Seils ab. Wenn man $z(x) = y'(x)$ substituiert und anschließend die Methode der getrennten Variablen anwendet, ergibt sich

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{arsinh} z = a(x + C_1),\ C_1 \in \mathbb{R}$$

Auflösen nach z (Umkehrfunktion von arsinh) und nochmaliges Integrieren liefert

$$y(x) = \frac{1}{a}\cosh(a(x + C_1)) + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Die freien Konstanten C_1, C_2 sind durch die Randwerte festgelegt in dem man die folgenden zwei Gleichungen löst

$$\frac{1}{a}\cosh(a(x_i + C_1)) + C_2 = y_i,\ i = 1, 2$$

Im Allgemeinen sind diese beiden Gleichungen nur numerisch nach C_1, C_2 lösbar. Aber im Spezialfall $y_1 = y_2$ kann man die Konstanten ermittelt

$$C_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, C_2 = y_2 - \frac{1}{a}\cosh(a\frac{x_2 - x_1}{2})$$

Wir formulieren nun die allgemeine Randwertaufgabe.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Randwertaufgabe für die lineare Dgl

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = s(x)$$

der $n-$ten Ordnung mit den n Randbedingungen

$$\begin{aligned} R_j(y(a)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{jk} y^{(k)}(a) = \alpha_j,\ j = 1, \dots, m \\ R_j(y(b)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} y^{(k)}(b) = \beta_j,\ j = m+1, \dots, n \end{aligned}$$

nennt man ein *lineares Randwertproblem $n-$ter Ordnung*. Hierbei sind die stetigen Funktionen a_k und s, sowie die reellen Zahlen $\alpha_{jk}, \beta_{jk}, \alpha_j, \beta_j$ gegeben.
Man sagt, das lineare Randwertproblem ist

1. *vollhomogen*, wenn $s(x) = 0$ **und** $\alpha_j = 0 = \beta_j$ für alle j gilt.

2. *halbhomogen*, wenn **entweder** $s(x) = 0$ **oder** $\alpha_j = 0 = \beta_j$ für alle j gilt.

3. *inhomogen* sonst.

Es lässt sich jedes inhomogene Randwertproblem in ein halbhomogenes umformen.
Wir formulieren einen Alternativsatz, der die Lösbarkeit von Randwertproblemen angibt.

Satz 1.4.1. *(Alternativsatz) Wir gehen von einem Randwertproblem gemäß der Definition aus. Dabei betrachten wir $s(x) = 0$. Es sei $(y_1(x), \dots, y_n(x))$ ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Dgl $L(y) = 0$ und wir definieren*

$$\Delta = det(R) = det \begin{pmatrix} R_1(y_1(a)) & \dots & R_1(y_n(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_m(y_1(a)) & \dots & R_m(y_n(a)) \\ R_{m+1}(y_1(b)) & \dots & R_{m+1}(y_n(b)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_n(y_1(b)) & \dots & R_n(y(b)) \end{pmatrix} \tag{1.80}$$

und $\gamma = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n)^T$. Dann kann man folgende Fälle unterscheiden:

1. *Ist $\Delta \neq 0$, dann ist das Randwertproblem eindeutig lösbar.*
2. *Ist $\Delta = 0$ und gilt $rgR = rg(R, \gamma)$ (rgR stellt den Rang der Matrix R dar), dann hat das Randwertproblem unendlich viel Lösungen.*
3. *Ist $\Delta = 0$ und gilt $rgR < rg(R, \gamma)$, dann ist das Randwertproblem unlösbar.*

Beispiel 1.4.1. *Wir betrachten die lineare Dgl.*

$$L(y) = y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$$

Mit Hilfe des charakteristischen Gleichung $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$ erhält man als Fundamentalsystem (Lösungen $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$)

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = xe^x, y_3(x) = e^{2x}$$

Um die Randwerte zu bestimmen, benötigen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} y_1'(x) = e^x, \quad y_2'(x) = (x+1)e^x, \quad y_3(x) = 2e^{2x} \\ y_1''(x) = e^x, \quad y_2''(x) = (x+2)e^x, \quad y_3''(x) = 4e^{2x} \end{aligned}$$

Wir gehen nun von verschiedenen Randwertproblemen aus und zeigen, welche Fälle möglich sind.

1. *Wir wählen $y(0) = \alpha_1, y'(0) = \alpha_2, y(1) = \beta_3$ Die Matrix in 1.80 berechnet sich zu*

   $$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ e & e & e^2 \end{pmatrix}$$

   und somit $\Delta = e^2 + e - e - 2e = e(e-2) \neq 0$. Damit erhalten wir die Alternative 1) aus dem Satz und für jeden Vektor $\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)^T$ ist das Randwertproblem eindeutig lösbar.

2. *Es seien nun $y(0) - y'(0) = -1, y'(0) - y''(0) = -1, y(1) - y'(1) = -e$ Dann ergibt sich für die Matrix*

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -e & -e^2 \end{pmatrix}, \text{ und } \gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -e \end{pmatrix}$$

   Somit folgt diesmal $\Delta = 0, rgR = rg(R, \gamma) = 2$. Also trifft Fall 2) zu und das Problem hat unendlich viele Lösungen

3. *Es seien nun $y(0) - y'(0) = 0, y'(0) - y''(0) = 0, y(1) - y'(1) = 1$ Dann ergibt sich die gleiche Matrix*

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -e & -e^2 \end{pmatrix}, \text{ und diesmal } \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Somit folgt diesmal $\Delta = 0, rgR = 2$ und $rg(R, \gamma) = 3$. Also trifft Fall 3) zu und das Problem hat keine Lösung

Wir formulieren das Lösungsverfahren. Ausgangspunkt ist das lineare Randwertproblem laut obiger Definition.

1. Zuerst bestimmen wir eine spezielle Lösung ψ der inhomogenen linearen Dgl. $L(y) = s(x)$. Dann formen wir das Problem in eine halbhomogene Randwertaufgabe mit homogener lin. Dgl. um (geht immer).
2. Dann bestimmen wir eine Fundamentallösung $z_1, \ldots, z_n$ der homogenen lin Dgl. $L(z) = 0$ und bilden die Matrix R und den Vektor $\gamma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_n)^T$ aus dem Alternativsatz.
3. Im Falle der Lösbarkeit (a) oder b) aus dem Alternativsatz) lösen wir das LGS $R \cdot \vec{c} = \gamma$ nach $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$ auf.
4. Die Lösung des Randwertproblems lautet nun

$$y(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k z_k(x)$$

Beispiel 1.4.2. *Gegeben sei die lin. Dgl.*

$$L(y) = y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2 \text{ mit } y(0) = 3, y'(0) = 6, y(1) = 3e^2 - 1$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen lin. Dgl $L(y) = 2$ ist $\psi(x) = -1$. Wir setzen $z(x) = 1 + y(x)$ und erhalten mit dieser Transformation eine äquivalente homogene lin. Dgl.

$$L(z) = 0 \text{ mit } z(0) = 4, z'(0) = 6, z(1) = 3e^2$$

Für diese homogene lin. Dgl. bestimmen wir ein Fundamentalsystem

$$z_1(x) = e^x, z_2(x) = xe^x, z_3(x) = e^{2x}$$

Die Matrix R aus dem letzten Beispiel und der Vektor γ lauten

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ e & e & e^2 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3e^2 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass $\Delta = detR = e^2 + e - e - 2e = e(e-2) \neq 0$ und damit gibt es eine eindeutige Lösung zu dem LGS

$$R \cdot \vec{c} = \gamma$$

nämlich $\vec{c} = (1, -1, 3)^T$. Somit haben wir als eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$y(x) = -1 + e^x - xe^x + 3e^{2x} = (1-x)e^x + 3e^{2x} - 1$$

Wir können festhalten, dass ein vollhomogenes lin. Rangwertproblem entweder die eindeutige Lösung $y(x) = 0$ hat oder es gibt unendlich viele Lösungen.
In den Anwendungen - insbesondere als Technik zum Lösen von partiellen Differenzialgleichungen - wird ein vollhomogenes lin. Randwertproblem häufig in Verbindung mit einem weiteren Parameter λ formuliert. Ein solches erweitertes System kann z.B. die Form haben

$$\begin{aligned} L(y) - \lambda y &= \sum_{k=1}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) - \lambda y = 0 \\ R_j(y(a)) &= 0, j = 1, \ldots, m \\ R_j(y(b)) &= 0, j = m+1, \ldots, n \end{aligned}$$

Ein derartiges vollhomogenes Randwertproblem mit einem Parameter λ nennt man auch *Eigenwertproblem.* Ob die Lösung eindeutig (also $y(x) = 0$) ist oder ob es unendliche viele Lösungen gibt hängt von λ ab. Alle diejenigen λ für die der zweite Fall gilt, nennt man Eigenwerte der Randwertaufgabe und die zugehörigen Lösungen $y(x) \neq 0$ nennt man Eigenfunktion zu λ. Es ist klar, dass es zu einem Eigenwert unendlich viele Eigenfunktionen gibt, denn mit $y(x)$ Eigenfunktion ist auch $c \cdot y(x)$ eine Eigenfunktion.
Anhand der Eulerschenknicklast wollen wir die Herleitung illustrieren. Ein senkrechter, unten befestigter elastischer Stab der Länge l wird durch eine senkrecht einwirkende Kraft F belastet. Gesucht ist die kleinste Kraft F_1 mit der der Stab aus der Ruhelage bewegt wird, d.h. seitlich ausgelenkt wird. Für kleine Auslenkungen bzw. Durchbiegungen gilt für die Auslenkung $y(x)$ $(0 \leq x \leq l)$ die Differenzialgleichung

$$y''(x) = -\frac{F}{E \cdot J} y$$

wobei E das Elastizitätsmodul und J das axiale Flächenträgheitsmodul darstellen. Die Größe $F\cdot y(x)$ ist das Biegemoment. Damit wir den Zusammenhang mit den Eigenwertproblemen erkennen, führen wir die Größe

$$\lambda = \frac{F}{E \cdot J}$$

ein. Dann erhalten wir das Eigenwertproblem

$$y'' + \lambda y = 0, y(0) = y'(l) = 0$$

Gesucht sind nun die Eigenwerte λ mit der zugehörigen Eigenfunktion $y(x)$. Die allgemeine Lösung dieser homogenen linearen Dgl. 2.Ordnung lautet

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Wir brauchen noch die Ableitung

$$y'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Die erste Randbedingung $y(0) = 0$ ergibt $C_1 = 0$ und die zweite $y'(l) = 0$ liefert

$$C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$$

Nichttriviale Lösungen bekommen wir nur, wenn λ eine der Gleichungen

$$\sqrt{\lambda}l = \pm(2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N}$$

löst. Damit erhalten wir eine Folge von Eigenwerten und Eigenfunktionen

$$\lambda_k = (2k-1)^2\frac{\pi^2}{4l^2} \text{ und } y_k(x) = C_2 \sin((2k-1)\frac{\pi}{2l}x)$$

wobei $k \in \mathbb{N}, C_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Zum ersten Eigenwert gehört die Eulersche Knicklast

$$F_1 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{4l^2}$$

1.4.1 Übungen

1. Lösen Sie das RWP
$$y'' + y = 1,\ y(0) = 0,\ y(2\pi) = 0$$

2. Gegeben ist das Eigenwertproblem
$$y'' + y = \lambda y,\ y'(0) = y('(\pi) = 0.$$
Bestimmen sie zunächst ein Fundamentalsystem mittels Fallunterscheidung von λ. Danach bestimmen Sie die Lösungen (Eigenwerte, Eigenfunktionen) in Abhängigkeit der einzelne Fälle (RWP!).

3. Lösen Sie das inhomogene RWP
$$y'' - y = 2x,\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1)$$
(Hinweis: Stellen Sie die Gleichungen für R_i auf)

4. Lösen Sie das RWP
$$y'' - 3y' + 2y = 0\ y(0) = y(2) = 0$$

5. Lösen Sie das Eigenwertproblem
$$-(x^2y')' - \frac{1}{4} = \lambda y,\ y(1) = 0,\ y(e^{2\pi}) = 0$$

6. Zeigen sie, dass das Randwertproblem
$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0,\ y(0) = \alpha_1,\ y'(0) = \alpha_2, y(1) = \beta$$
für alle $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ eine eindeutige Lösung hat.

7. Bestimmen Sie die Lösung des RWP
$$y'' - 4y' + 5y = 25x + 8\cos x,\ y(0) = 5,\ 2y(2\pi) - y'(\pi) = 8\pi$$

8. Bestimmen sie alle reellen λ und die zugehörigen Eigenfunktionen des Eigenwertproblems
$$y'' + \lambda y = 0,\ y(0) - y'(0) = y(\pi) - y'(\pi) = 0$$
Dabei muss man eine Fallunterscheidung für λ vornehmen. Beachten Sie: $y = 0$ ist nie eine Eigenfunktion.

9. Für welche $r \in \mathbb{R}$ besitzt das RWP
$$4y'' + y = r\sin\frac{x}{2},\ y(0) = 0,\ y(2\pi) = 1\pi$$
reelle Lösungen? Bestimmen Sie für alle dies r die Lösungen.

10. Gegeben sei für $x > 0$ die Differenzialgleichung
$$y'' - \frac{2}{x}y' + 2\frac{1}{x^2}y = 0$$
Bestimmen Sie zuerst ein Fundamentalsystem, d.h. zwei linear unabhängige Lösungen. Anschließend bestimmen Sie für die folgenden Fälle von Randwerten, welche Lösbarkeit vorliegt und geben Sie gegebenfalls alle Lösungen an.

    (a) $y(1) = 5,\ y(2) = 16.$

(b) $y(1) = 2,\ y(2) = 2.$

(c) $2 \cdot y(\frac{1}{2}) - 5y'(\frac{1}{2}) = 2,\ y(2) - 2y'(2) = 16$

11. * Gegeben ist das Eigenwertproblem

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda\frac{1}{x^2}y = 0,\ y'(1) = y'(e^{2\pi}) = 0$$

Lösen Sie das Eigenwertproblem.

Hinweis: Bestimmen Sie für welches C die Funktion $y(x) = \cos(C \cdot \ln x)$ Lösung der homogenen Differenzialgleichung ist.

1.5 Systeme von Differenzialgleichungen

In diesem Abschnitt werden wir eine wichtige Verallgemeinerung der Differenzialgleichungen kennen lernen - die Systeme. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel - dem so genannten Räuber-Beute-Model.

Beispiel 1.5.1. *Wir betrachten zwei Populationen: Die Räuber (Füchse) und die Beute (Hasen). Die Anzahl der Hasen in einem Gebiet bezeichnen wir zur Zeit t mit $x(t)$, die der Füchse mit $y(t)$. Gibt es keine Räuber, so ist die Zuwachsrate der Hasen proportional zur Anzahl, d.h.*

$$\dot{x}(t) = ax(t),\ a > 0 \tag{1.81}$$

und gibt es keine Beute, so nimmt die Fuchspopulation proportional zur Anzahl ab, d.h.

$$\dot{y}(t) = -dy(t),\ d > 0 \tag{1.82}$$

Leben beide im gleichen Revier, so ergibt sich

- *die Hasenpopulation nimmt mit der Wechselwirkung der Füchse ab, d.h. porportional zu $x \cdot y$*
- *die Fuchspopulation nimmt mit der Wechselwirkung der Beute zu, d.h. porportional zu $x \cdot y$*

Also erhalten wir folgendes System

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t),\ b \geq 0 \text{ und } \dot{y}(t) = cx(t)y(t) - dy(t)\ c \geq 0 \tag{1.83}$$

Man kann analog ein System für zwei Populationen entwerfen, die sich gegeseitig auffressen

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t),\ b > 0 \text{ und } \dot{y}(t) = dy(t) - cx(t)y(t),\ c > 0 \tag{1.84}$$

Allgemein lässt sich dieses System nicht mehr in geschlossener Form lösen sondern nur noch numerisch. In beiden Systemen (1.83) und (1.84) erscheint die Variable t nicht explizit, daher kann man die Systeme allgemein in der Form

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x,y) \text{ und } \dot{y} = \frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

und damit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \tag{1.85}$$

ausdrücken. Solche System nennt man autonom.
Die Dgl (1.85) beschreibt den geometrischen Ort der Lösungen (x, y) in Abhängigkeit von der Zeit. Die Kurven bezeichnet man als Trajektorien.

Eigenschaften

1. *Leicht einzusehen ist die Tatsache, dass die Form der Trajektorien nicht vom Startpunkt t_0 abhängt.*

2. *Die rechten Seiten von (1.83) und (1.84) sind stetig differenzierbar und damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt. Somit geht durch jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ genau eine Lösung. Damit können sich die Trajektorien nicht schneiden.*

3. *Gilt für die stetig differenzierbaren Funktionen f, g die Gleichung $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, so nennt man diesen Punkt (x_0, y_0) kritischen oder stationären Punkt des Systems (1.83) bzw. (1.84). Dort gilt dann $\dot{x} = \dot{y} = 0$ und die eindeutig Lösung ist*

   $$x(t) = x_0 \text{ und } y(t) = y_0 \text{ für alle } t$$

4. *Einen kritischen Punkt kann eine außerhalb startende Lösung nur asymptotisch erreichen*

5. *Jede außerhalb eines kritischen Punktes startende Lösung durchläuft die Trajektorie in einer bestimmten Richtung.*

6. *Man kann drei verschiedene Verhaltensweisen von Trajektorien unterscheiden:*

   (a) *Eine Lösung in der Nähe eines kritischen Punktes kann sich diesem beliebig nähern. Gilt das für alle Lösungen, so spricht man von einem stabilen kritischen Punkt.*

   (b) *Entfernen sich die Lösungen von einem kritischen Punkt, so nennt man ihn instabil.*

   (c) *Bilden die Trajektorien eine geschlossene Kurve, so gilt nach dem Satz von Poincare-Bendixon, dass es im Inneren der Kurve einen kritischen Punkt gibt.*

   Für die Systeme (1.83) gilt in $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y); x, y > 0\}$ der Fall c).

7. *Startet man zur Zeit t_0 im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$, so existieren die Lösungen auf $[t_0, \infty[$, ja sogar auf ganz $\mathbb{R}$, also global. Ferner gilt für alle $t \in \mathbb{R}: \quad x(t), y(t) > 0$. Auf $\mathbb{R}^2_{+,0}$ gibt es zwei kritische Punkte für das System (1.83):*

$$G_1 = (0,0) \text{ und } G_2 = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$$

Die beiden Halbachsen stellen die ersten Fälle dar: entweder nur Hasen oder nur Füchse. Somit ist dann G_1 sowohl einmal anziehend bzw. stabiler Punkt (für die Füchse) und einmal instabil (für die Hasen).

Wir wollen die Trajektorien berechnen. Dazu lösen wir die Dgl. (1.83), soweit es geht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(cx-d)}{x(a-by)} \Leftrightarrow \frac{a-by}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d-cx}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{a-by}{y} dy + \frac{d-cx}{x} dx = 0 \tag{1.86}$$

Integrieren ergibt:

$$a \ln y - by + d \ln x - cx = \ln C (C \in \mathbb{R}_+) \tag{1.87}$$

und damit

$$y^a e^{-by} x^d e^{-cx} = C \Leftrightarrow C = \frac{x^d y^a}{e^{by} e^{cx}} \tag{1.88}$$

Da (1.88) nicht von t abhängt, kann man C durch den Startpunkt (x_0, y_0) festlegen (Höhenlinien!)

$$C = \frac{x_0^d y_0^a}{e^{by_0} e^{cx_0}}$$

Beispiel 1.5.2.

$$\dot{x} = 3x - xy, \text{ und } \dot{y} = \frac{1}{2}xy - y, \text{ also } a = 3, b = 1, c = \frac{1}{2}, d = 1$$

Also ergeben sich als Lösungskurven (Integralkurven)

$$y^3 e^{-y} x e^{-\frac{1}{2}x} = C, \ C \in \mathbb{R}$$

Analog kann man die letzte Argumentation auch für das System (1.84) durchführen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(d-cx)}{x(a-by)} \Leftrightarrow \frac{a-by}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{cx-d}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{a-by}{y} dy + \frac{cx-d}{x} dx = 0 \tag{1.89}$$

Integrieren ergibt:

$$a \ln y - by + cx - d \ln x = \ln C (C \in \mathbb{R}_+) \tag{1.90}$$

und damit

$$y^a e^{-by} x^{-d} e^{cx} = C \Leftrightarrow \frac{y^a}{e^{by}} = C \frac{x^d}{e^{cx}} \tag{1.91}$$

Beispiel 1.5.3.

$$\dot{x} = 3x - xy, \; \textit{und } \dot{y} = 2y - xy, \; \textit{also } a = 3, b = 1 = c, d = 2$$

Es ergeben sich als Lösungskurven:

$$y^3 e^{-y} x^{-2} e^{-x} = C, \; C \in \mathbb{R}$$

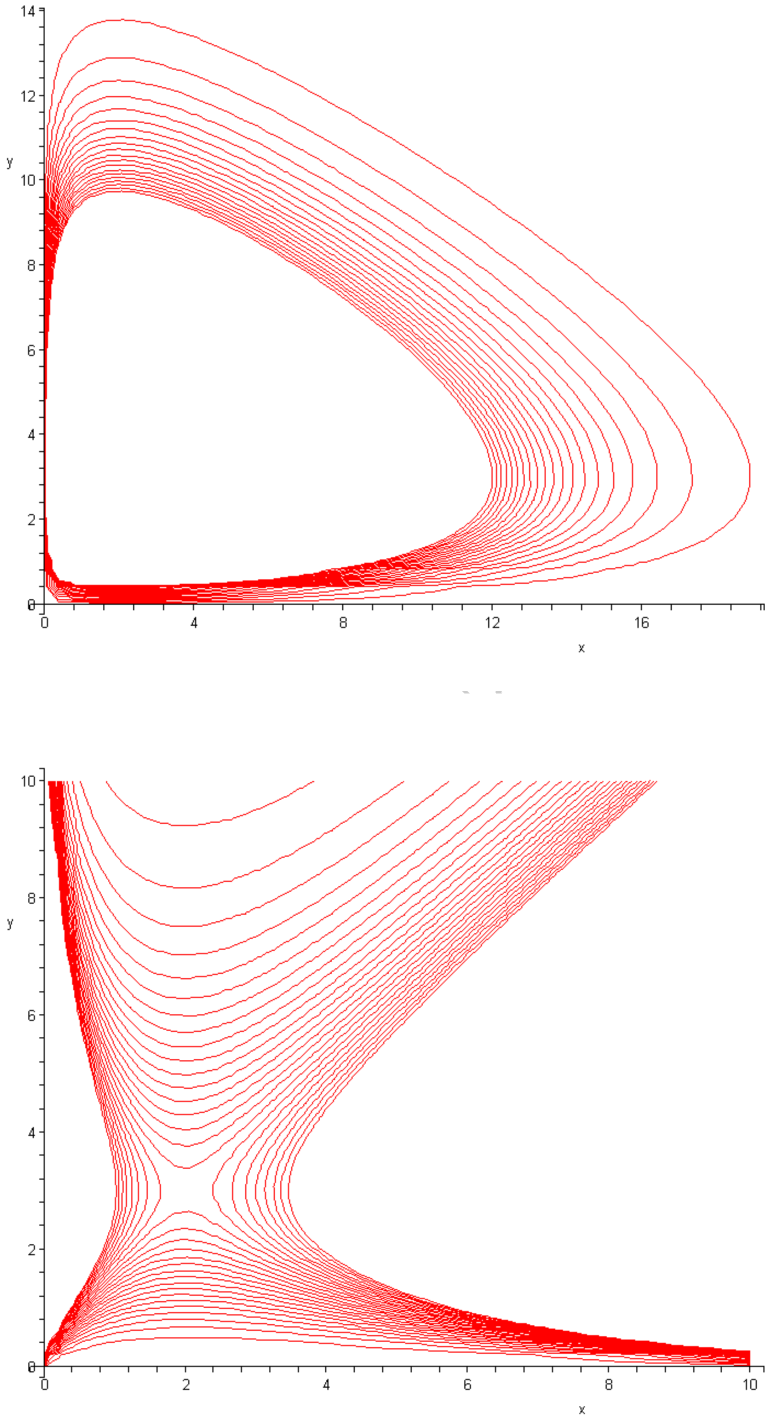

Abbildung 1.2: In der obigen Abbildung ist das System (1.83) dargestellt (Beispiel 1). Dabei erkennt man, dass in $\mathbb{R}^2_+$ die Lösungen geschlossene Trajektorien sind. In der "Mitte" existiert der Punkt G_2. Es ist das klassische Räuber-Beute-Modell. In der unteren Abbildung hingegen werde zwei sich auffressende Populationen dargestellt. Hier ist der Punkt G_2 instabil, alle Lösungen laufen davon weg.

Lineare Systeme

Bevor wir uns dem einfachen und auch lösbaren Fall der Systeme mit konstanten Koeffizienten zuwenden, wollen wir den allgemeinen Fall behandeln. Geschlossene Lösungen sind meist nicht möglich anzugeben.
Zuerst führen wir eine Matrixfunktion ein. Gegeben sei ein (offenes) Intervall $I \subset \mathbb{R}$ (z.B. $I =]a,b[$). Unter einer Matrixfunktion verstehen wir eine Abbildung

$$A : I \longrightarrow \mathbb{R}^{m,n}$$

D.h. jedem $t \in I$ wird eine (m,n)-Matrix $A(t)$ zugeordnet $(m,n \in \mathbb{N})$. Dann kann man für jeden Eintrag (i,j) in der Matrixfunktion $A(t)$ eine skalare Funktion $\alpha_{i,j} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ zuordnen, und wir können $A(t)$ auch in der Form

$$A(t) = (\alpha_{i,j}(t))_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$$

schreiben.
Man sagt, die Matrixfunktion $A : I \longrightarrow \mathbb{R}^{m,n}$ ist

- stetig, wenn alle $\alpha_{i,j} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.
- intergrierbar, wenn alle $\alpha_{i,j} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ intergrierbar sind.
- (stetig) diff-bar, wenn alle $\alpha_{i,j} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (stetig) diff-bar sind.

Man schreibt dann

$$\begin{aligned} \int_c^d A(t)dt &= \left(\int_c^d \alpha_{i,j}(t)dt\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le n}, \ a < c < d < b \\ A'(t) &= \left(\alpha'_{i,j}(t)\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le n}, \ t \in I \end{aligned}$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln beim Differenzieren:

Lemma 1.5.1. *Sind $A(t), B(t)$ differenzierbare Matrixfunktionen und $x(t)$ differenzierbar, so gilt*

$$\begin{aligned} (AB)' &= A'B + AB' (\text{ Matrixmultiplikation!}) \\ (Ax)' &= A'x + Ax' (\text{ Multiplikation Matrix mit Vektor!}) \\ (det A)' &= \sum_{i=1}^{n} det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}'_i, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n) \end{aligned}$$

Unter einem *Linearen System von n-Diffrenzialgleichungen* versteht man das System von Diffenrenzialgleichungen

$$\begin{aligned} y'_1 &= \alpha_{11}y_1 + \cdots + \alpha_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ \vdots & \quad \vdots \\ y'_n &= \alpha_{n1}y_1 + \cdots + \alpha_{nn}(t)y_n + b_1(t) \end{aligned} \tag{1.92}$$

In Matrixschreibweise lautet dies

$$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t) \tag{1.93}$$

Dabei sind $y_1, \ldots, y_n$ die gesuchten Lösungen des Systems, wobei $\alpha_{ij}, b_1, \ldots, b_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ gegebene Funktionen $(i, j = 1, \ldots, n)$ sind und $A(t) = (\alpha_{ij}(t)), \vec{b}(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))^T$.
Man nennt das System (1.93) *homogen*, wenn $\vec{b}(t) = \vec{0}$. Sonst wird es *inhomogen* bezeichnet.
Für homogene Systeme gibt es immer die triviale *Null*-Lösung. Auš erdem gilt:

1. Sind $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ Lösungen des homogenen Systems (1.93) und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, so ist auch
$$\vec{y} = \lambda_1 \vec{y}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{y}_k$$
Lösung.

2. Sind $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ Lösungen des homogenen Systems (1.93) und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit
$$\lambda_1 \vec{y}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{y}_k = \vec{0} \tag{1.94}$$
so nennt man $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ *lineare unabhängige* Lösungen, falls aus (1.94) $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ folgt.

Satz 1.5.1. *1. Das Anfangswertproblem*
$$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t),\ \ \vec{y}(t_0) = \vec{y_0}$$
hat für alle $\vec{y_0} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung auf ganz $I \subset \mathbb{R}$.

2. Es gibt immer n linear unabhängige Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ des homogenen Systems (1.93).

3. Für $k > n$ sind Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ des homogenen Systems (1.93) immer linear abhängig.

Sind $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems (1.93), so nennt man diese ein *Hauptsystem* oder *Fundamentalsystem* des homogenen Systems (1.93).
Man kann für ein Fundamentalsystem $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ die *Lösungsmatrix*

$$Y(t) = (\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_n(t))$$

bilden. Die Matrixfunktion $Y(t)$ erfüllt dann die Differenzialgleichung

$$Y(t)' = A(t)Y(t)$$

Allgemein kann man festhalten:

1. Ist $Y(t)$ ein Fundamentalsystem, so erhält man alle Lösungen des homogenen Systems (1.93) durch
$$\vec{y}(t) = Y(t)\vec{c},\ \ \vec{c} \in \mathbb{R}^n$$

2. Ein spezielles Fundamentalsystem erhält man aus dem System (in Matrixschreibweise)
$$X'(t) = A(t)X(t),\ \ X(t_0) = E,\ \ (E \text{ die Einheitsmatrix}) \tag{1.95}$$

3. Eine wichtige Grös̈ e ist die so genannte *Wronski-Determinante*. Ist $Y(t)$ ein Fundamentalsystem des homogenen Systems (1.93), so bezeichnet
$$\Phi(t) = \det Y(t)$$
die *Wronski-Determinante* an der Stelle t. Es ist $\Phi(t) \neq 0$ für ein Fundamentalsystem $Y(t)$. Es gilt der folgende Satz:

   Satz 1.5.2. *Die Wronski-Determinante $\Phi(t)$ erfüllt die lineare Differenzialgleichung 1.Ordnung*
$$\Phi'(t) = (sp(A(t))\Phi(t)$$
wobei $sp(A(t))$ die Spur der Koeffizientenmatrix $A(t)$ ist. Somit gilt als Lösungsformel für die Wronski-Determinante:
$$\Phi(t) = \Phi(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} sp(A(u))du)$$

4. Allgemein läs̈ t sich das homogene System (1.93) nicht in geschlossener Form lösen. Es existiert jedoch nach dem *Reduktionsverfahren von d'Alembert* die Möglichkeit, wenn eine Lösung bekannt ist, das System auf eines mit $n-1$ Gleichungen zurück zuführen

Wie im Fall einer Gleichung, kann man mit Hilfe der Variation der Konstanten die allgemeine Lösung des Systems (1.93) finden.

Satz 1.5.3. *Das Anfangswertproblem ($A(t), \vec{b}(t)$ stetig in I, $t_0 \in I$ fest)*
$$\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t),\ \ y(t_0) = \vec{\eta},\ \ \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$$
hat die eindeutig bestimmte Lösung
$$\vec{y}(t) = X(t)\vec{\eta} + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$$
wobei $X(t)$ das Fundamentalsystem des homogenen Systems (1.95) ist.

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir beginnen mit dem homogenen System (1.93), allerdings mit der Voraussetzung, dass die Matrixfunktion $A(t)$ zeitunabhängig ist, d.h.

$$A(t) = A(t_0) = A,\ t \in I$$

Damit haben wir das *homogene System mit konstanten Koeffizienten*

$$\vec{y}' = A \cdot \vec{y} \tag{1.96}$$

Wie bereits im vorhergehenden Abschnitt erwähnt, ist die triviale Lösung $y(t) = (0, \ldots, 0)^T$ immer eine Lösung, sowie jede Linearkombination. Wie ebenfalls im vorhergehenden Abschitt erwähnt, existiert immer ein so genanntes Fundamentalsystem

$$Y(t) = \left(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n}\right)$$

Der nächste Satz gibt Aufschluss, wie dies im Fall (1.96) aussieht.

Satz 1.5.4. *Gegeben sei eine $(n, n)-$Matrix A. Das homogene lineare System*

$$\vec{y}' = A \cdot \vec{y}$$

besitzt ein Fundamentalsystem $\vec{y_1}(t), \ldots, \vec{y_n}(t)$.
Besitzt die Matrix die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (nicht notwendig verschieden) mit den sogehörigen Eigenvektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ (nicht notwendig linear unabhängig), so sind die Funktionen

$$\vec{y_1}(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{v_1}, \ldots, \vec{y_n}(t) = e^{\lambda_n t} \cdot \vec{v_n} \tag{1.97}$$

Lösungen des Systems. Sind zusätzlich die Eigenvektoren linear unabhängig, so bilden die Lösungen (1.97) ein Fundamentalsystem, d.h. jede Lösung ist eine Linearkombination der Funktionen in (1.97)

Bemerkung 1.5.1.

1. *Besitzt die Matrix A die n linear unabhängigen Eigenvektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$, so ist die Matrix diagonalisierbar. Nur in diesem Fall liefert der Satz 1.5.4 ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung des homogenen Systems hat die Form*
$$\vec{y}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{v_1} + \ldots + c_n \cdot e^{\lambda_n t} \cdot \vec{v_n}. \tag{1.98}$$

2. *Kann man die Koeffizientenmatrix nicht diagonalisieren, so bekommt man über die Eigenwerte und Eigenvektoren noch kein Fundamentalsystem.*

3. *Wir betrachten ein spezielles System, das bei der Lösung von Differenzialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten von Bedeutung ist.*
$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(t) \tag{1.99}$$

mit $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig. Man substituiert nun* $z_1(t) = y(t), z_2(t) = y'(t), \ldots, z_n(t) = y^{(n-1)}(t)$. *Dann erhalten wir das System*

$$\begin{array}{ccccccc} z_1' & = & & z_2 & & & \\ z_2' & = & & & z_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ z_n' & = & -a_0 z_1 & -a_1 z_2 & \ldots & -a_n z_n & +b(t) \end{array}$$

Setzt man nun

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ sowie } \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Dann drücken wir das System in Matrixschreibweise aus:

$$\vec{z}' = A \cdot \vec{z} + \vec{b}(t) \tag{1.100}$$

Die Matrix A in (1.100) nennt man Frobeniusmatrix und deren charakterisches Polynom $\det(A - \lambda E)$ *lautet*

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

was mit der charakteristischen Gleichung der Differenzialgleichung (1.99) identisch ist. Nun ist die Frobeniusmatrix A nur dann diagonalisierbar, wenn die Eigenwerte paarweise verschieden sind. Hat also A mehrfache Nullstellen, so ist sie nicht diagonalisierbar und wir haben mit (1.98) nur Lösungen aber kein Fundamentalsystem gefunden.

Beispiele 1.5.1. *1. Wir betrachten die lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung*

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Nach Bemerkung 1.5.1(3) kann dies in ein System

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{1.101}$$

umschreiben. Die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

lauten $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. *Damit haben wir einen doppelten Eigenwert und nach der Bemerkung 1.5.1(3) ist sie nicht diagonalisierbar.*

2. *Nun betrachten wir die lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung*

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Nach Bemerkung 1.5.1(3) kann man dies in ein System

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{1.102}$$

umschreiben. Diesmal lauten die Eigenwerte der Frobeniusmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ mit Eigenvektor } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2 \text{ mit Eigenvektor } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren sind linear unabhängig, deshalb erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\vec{z_1}(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{z_1}(t) = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Als allgemeine Lösung ergibt sich

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t} \\ c_1 \cdot e^t + 2c_2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}$$

Was passiert, wenn das charakteristische Polynom nicht in reelle Linearfaktoren zerfällt, d.h. wenn das charakterische Polynom auch einen rein komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$ besitzt? Wir wissen, dass dann auch der konjugiert komplexe $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ eine Nullstelle ist. Zu dem komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$ kann man den komplexen Eigenvektor $\vec{v} = \vec{a} + i\vec{b}$ berechnen. Formal ist dann

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= e^{\lambda t} \cdot \vec{v} = e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{a} + i\vec{b}) \text{ und mit der Eulerdartsellung} \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) \cdot \vec{a} - \sin(\beta t) \cdot \vec{b}) + ie^{\alpha t} \cdot (\sin(\beta t) \cdot \vec{a} + \cos(\beta t) \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

Lösung des Systems. Da der Realteil von $\vec{y}(t)$

$$\vec{y}_1(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) \cdot \vec{a} - \sin(\beta t) \cdot \vec{b})$$

wie auch der Imaginärteil

$$\vec{y}_2(t) = e^{\alpha t} \cdot (\sin(\beta t) \cdot \vec{a} + \cos(\beta t) \cdot \vec{b})$$

das System der homogenen linearen Dgl (1.96) erfüllt, haben wir zwei Vertreter des Fundamentalsystems erhalten. Da die Betrachtung der konjugiert komplexen Nullstelle bis auf das Vorzeichen die gleichen Lösungen ergeben, haben wir für zwei Nullstellen des charakterischen Polynoms auch zwei linear unabhängige Lösungen von (1.96) erhalten. Auf dieser Weise erhalten wir zu den komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynom ein Fundamentalsystem aus reellen Lösungen (vorausgesetzt es gibt n linear unabhängige komplexe Eigenvektoren).

Beispiel 1.5.4. *Wir betrachten das System von Differenzialgleichungen*

$$\begin{aligned} y_1' &= 2 \cdot y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

Wir schreiben dies in Matrixschreibeweis

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}$$

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda = 1 + i$ und $\overline{\lambda} = 1 - i$. Zu λ gehört der Eigenvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \vec{y}_1(t) &= e^t(\cos(t) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \\ \vec{y}_2(t) &= e^t \cdot (\sin(t) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Als allgemeine Lösungen erhält man

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2c_1 \cdot \cos t + 2c_2 \sin t \\ (c_1 + c_2) \cos t + (c_2 - c_1) \sin t \end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

System von Differenzialgleichungen - Matrizenfunktionen

Einen alternativen und mehr formalen Zugang erhält man, wenn man Polynome bzw. Potenzreihen auf Matrizenwerte verallgemeinert. Dazu betrachten wir ein allgemeines Polynom $k-$ten Grades

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

Setzt man nun formal statt x eine Matrix B ein, erhält man (statt Multiplikation verwendet man Matrizenmultiplikation)

$$p(B) = c_0 E + c_1 B + \ldots + c_n B^n \ (E \text{ die Einheitsmatrix})$$

Wenn man die Matrix mit einer Variablen t multipliziert, d.h wenn man $B = tA$ setzt, folgt

$$p(tA) = c_0 E + c_1 tA + \ldots + c_n t^n A^n$$

Leitet man nach t ab, folgt

$$\frac{d}{dt} p(tA) = A p'(tA)$$

Nun betrachten wir eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

mit einem Konvergenzradius r. Dann kann man für (n,n)-Matrizen mit $\|B\| < r$ die matrixwertige Potenzreihe

$$f(B) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k B^k, \ B^0 = E$$

bilden. Auch hier gilt dann für $B = tA$

$$f(tA) = c_0 E + \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k A^k$$

Wie bei den $\mathbb{R}-$wertigen Potenzreihen folgt

$$\frac{d}{dt} f(tA) = A f'(tA) \tag{1.103}$$

Beispiel 1.5.5. *Speziell gilt für die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion:*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

und damit für eine Matrix B

$$e^B = E + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{3!} + \ldots$$

Erneut mit $B = tA$ folgt beim Differenzieren gemäß (1.103)

$$(e^{tA})' = A e^{tA} \tag{1.104}$$

Setzt man nun als Matrixfunktion

$$X(t) = e^{tA} \quad \textit{mit } X(0) = E \tag{1.105}$$

so erfüllt jede Spalte von X das Differenzialgleichungssystem

$$\vec{y}' = A\vec{y} \tag{1.106}$$

gemäß (1.104). Damit bildet also $X(t)$ aus (1.105) ein Fundamentalsystem.

Bevor wir uns dem allgemeinen Satz zuwenden, wollen wir noch ein paar Eigenschaften matrixwertiger Exponentialfunktion angeben.

Lemma 1.5.2. *Es gelten für (n,n)-Matrizen B, C und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$*

1. $e^{B+C} = e^B e^C$, *falls* $BC = CB$.
2. $e^{C^{-1}BC} = C^{-1}e^B C$, *falls* $\det C \neq 0$.
3. $e^{diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = diag(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$ *wobei "diag" die Diagonalmatrix mit den Einträgen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *in der Diagonalen darstellt.*

Aus dem Lemma können wir folgendes Korollar formulieren.

Korollar 1.5.1. *Für eine beliebige (n,n)-Matrix A gilt*

1. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
2. $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$
3. $e^{A+\lambda E} = e^{\lambda}e^A$

Wir schlieš en diesen Abschnitt mit dem Satz über das inhomogene lineare Anfangswertproblem ab.

Satz 1.5.5. *Das Anfangswertproblem*

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t),\ \vec{y}(t_0) = \vec{\eta}\ (A \text{ ist eine konstante } (n,n) - \text{Matrix}) \tag{1.107}$$

besitzt nach Satz 1.5.3 die Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{\eta} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\vec{b}(s)ds$$

da $X(t) = e^{(t-t_0)A}$ *ein Fundamentalsystem mit* $X(t_0) = E$ *und*

$$(X(t))^{-1} = e^{-(t-t_0)A}$$

gemäš 1.5.1(1) sind.

Systeme von Dgl – Dgl höherer Ordnung.

Bis jetzt haben wir *eine* Funktion von *einer* Variablen. Allerdings hat man oft *mehrere* Funktionen von einer Variablen. Wir bezeichnen mit $y_1, \ldots, y_n$ die abhängigen Funktionen (oder Variablen). In impliziter Form lautet es:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n, \ldots, \text{ höhere Ableitungen }, t) &= 0\\
\Phi_2(y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n, \ldots, \text{ höhere Ableitungen }, t) &= 0\\
\vdots, \quad \vdots \quad \vdots &\ \vdots\\
\Phi_m(y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n, \ldots, \text{ höhere Ableitungen }, t) &= 0
\end{aligned}$$

Ziel: Nach einer abhängigen Variablen auflösen und diese eliminieren; oft muss man zusätzlich ableiten und erhält noch höhere Ableitungen.
Für jedes y_i gibt es eine allgemeine Lösung und somit ist die allgemeine Lösung ein n-dimensionaler Vektor $(y_1 \ldots, y_n)$. Es ist oft schwierig meist unmöglich, die Lösung in geschlossener Form anzugeben, insbesondere wenn das System nichtlinear ist. Deshalb betrachten wir hier - und dies auch nur sehr kurz - nur lineare Systeme.

Beispiele 1.5.2. *1. Betrachte*

$$\begin{aligned} I) &\qquad 2\dot{x} + \dot{y} - 2x - y = 6e^{2t} \\ II) &\qquad \dot{x} + 3x + y = 0 \end{aligned}$$

Schreibweise

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gleichung II) liefert

$$\begin{aligned} II \Rightarrow II^*) &\qquad y = -\dot{x} - 3x \\ \Rightarrow &\qquad \dot{y} = -\ddot{x} - 3\dot{x} \end{aligned}$$

In I) eingesetzt, ergibt dies

$$2\dot{x} + (-\ddot{x} - 3\dot{x}) - 2x - (-\dot{x} - 3x) = 6e^{2t} \;\Leftrightarrow\; \ddot{x} - x = -6e^{2t}$$

Die letzte Gleichung ist eine Dgl. vom Typ 8) ⇒ allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - 2e^{2t} \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} - 4e^{2t} \text{ in } II^*)$$

$$y(t) = -4C_1e^t - 2C_2e^{-t} + 10e^{2t}$$

2.

$$\begin{aligned} I) &\qquad \ddot{x} - 2x - 3y = 0 \\ II) &\qquad \ddot{y} + x + 2y = 0 \end{aligned}$$

aus II) erhalten wir

$$II^*) x = -\ddot{y} - 2y \;\Rightarrow\; \ddot{x} = -\ddddot{y} - 2\ddot{y} \overset{in\ I)}{\Rightarrow} -\ddddot{y} - 2\ddot{y} + 2\ddot{y} + 4y - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\ddddot{y} - y = 0$$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$ *und damit* $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t} \Rightarrow \ddddot{y} = \lambda^4 e^{\lambda t}$ *also erhält man als charakteristische Gleichung*

$$\lambda^4 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm 1 \;\; \textit{und}\; \lambda_{3,4} = \pm i$$

Damit hat man als allgemeine Lösung:

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + A \sin t + B \cos t \;\Rightarrow\; \ddot{y} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - A \sin t - B \cos t$$

Einsetzen in $II^*)$ *liefert*

$$x = -3C_1 e^t - 3C_2 e^{-t} - A \sin t - B \cos t.$$

3. *In der Ruhephase sind alle Federn entspannt und* $y_1 = y_2 = 0$. *Ist* $y_2 > y_1$, *dann zieht die Koppelungsfeder* M_1 *nach rechts und* M_2 *nach links.*

   Ist $y_2 < y_1$, *dann folgt das Umgekehrte. Daraus leitet man die Dgl'en ab:*

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{y}_1 &= -k_1 y_1 + k(y_2 - y_1) \\ M_2 \ddot{y}_2 &= -k_2 y_1 - k(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

   dann kann man wie im vorherigen Beispiel verfahren. Wir gehen nun von dem Spezialfall $M = M_1 = M_2$ *und* $k_1 = k_2 = k$ *aus. Dann folgt*

$$\begin{aligned} I)\; M\ddot{y}_1 &= -2ky_1 + ky_2 \\ II)\; M\ddot{y}_2 &= -2ky_2 + ky_1 \end{aligned}$$

   Durchdividieren mit k *ergibt für I)*

$$I^*)\; y_2 = \frac{M}{k}\ddot{y}_1 + 2y_1$$

   und weiter wie in Beispiel 2)

$$\ddot{y}_2 = \frac{M}{k}\ddddot{y}_1 + 2\ddot{y}_1$$

   Setzt man dies in II) ein folgt

$$\frac{M^2}{k}\ddddot{y}_1 + 2M\ddot{y}_1 = -2M\ddot{y}_1 - 4ky_1 + ky_1$$

   und damit

$$III)\, \ddddot{y}_1 + 4\frac{k}{M}\ddot{y}_1 + 3\left(\frac{k}{M}\right)^2 y_1 = 0$$

Wie in Beispiel 2) haben wir eine Dgl vom Typ 8) und können eine charakteristische Gleichung aufstellen:

$$\lambda^4 + 4\frac{k}{M}\lambda^2 + 3(\frac{k}{M})^2 = 0 \quad \overset{\textit{quadrat. Gleichung in } \lambda^2}{\Rightarrow}$$

$$\lambda_{1,2}^2 = (-2 \pm 1)\frac{k}{M} \;\Rightarrow\; \lambda_1^2 = -\frac{k}{M},\; \lambda_2^2 = -3\frac{k}{M}$$

Dann erhält man

$$\lambda_{1,a/b} = \pm i\sqrt{\frac{k}{M}} \textit{ und } \lambda_{2,a/b} = \pm i\sqrt{3\frac{k}{M}}$$

also stellt

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \textit{ und } \omega_2 = \sqrt{3\frac{k}{M}}$$

$$y_1 = A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t + C\sin\omega_2 t + D\cos\omega_2 t$$

die allgemeine Lösung für y_1 dar. Somit errechnet man für die zweite Ableitung

$$\ddot{y}_1 = -A\omega_1^2\sin\omega_1 t - B\omega_1^2\cos\omega_1 t - C\omega_2^2\sin\omega_2 t - D\omega_2^2\cos\omega_2 t$$

Setzt man dies in die Dgl I) ein und beachtet, dass $\omega_1^2 = \frac{k}{M}, \omega_2^2 = 3\frac{k}{M}$, so erhält man für die allgemeine Lösung y_2:*

$$y_2 = A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t - C\sin\omega_2 t - D\cos\omega_2 t$$

Somit ergibt sich für y_1 und y_2 jeweils eine ungedämpfte, überlagerte Schwingung mit Frequenz ω_1 und $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$. Wir berechnen schließlich noch die erste Ableitungen, um verschiedene AWP zu behandeln.

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= A\omega_1\cos\omega_1 t - B\omega_1\sin\omega_1 t + C\omega_2\cos\omega_2 t - D\omega_2\sin\omega_2 t \\
\dot{y}_2 &= A\omega_1\cos\omega_1 t - B\omega_1\sin\omega_1 t - C\omega_2\cos\omega_2 t + D\omega_2\sin\omega_2 t
\end{aligned}$$

Um verschiedene Situationen zu betrachten untersuchen wir nun folgende

Sonderfälle

(a) *Zu $t = 0$ sei $y_1(0) = y_2(0) = \kappa$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$. Dann folgt*

$$B + D = B - D = \kappa \textit{ und } A + C = A - C = 0 \;\Rightarrow$$

$$D = 0, B = \kappa \textit{ und } A = C = 0.$$

Somit erhalten wir als spezielle Lösungen

$$y_1 = y_2 = \kappa\cos\omega_1 t.$$

Damit schwingen beide Feder im gleichen Takt mit der Frequenz ω_1. Die Koppelungsfeder ist entspannt.

(b) *Nun gelte für $t = 0$, dass $y_1(0) = \kappa, y_2(0) = -\kappa, \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2 = 0,\ \kappa > 0$. Dann folgt*

$$B + D = \kappa, B - D = -\kappa, A + C = A - C = 0 \ \Rightarrow$$
$$D = \kappa, B = 0, A = C = 0 \ \Rightarrow$$

als allgemeine Lösungen notieren wir

$$y_1 = \kappa \cos \omega_2 t,\ y_2 = -\kappa \cos \omega_2 t \quad d.h.\ y_1 = -y_2.$$

Beide schwingen im gleichen Takt mit Frequenz $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$; Koppelungsfeder wird abwechselnd gedehnt und zusammengedrückt. Auch aus der Anschauung kann man $\omega_2 > \omega_1$ in diesem Fall ableiten.

(c) *In letzten Fall setzen wir bei $t = 0$ die Anfangswerte $y_1(0) = \kappa, y_2(0) = 0$ und $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ voraus ($\kappa > 0$). Dann ergibt sich*

$$B + D = \kappa, B - D = 0, A + C = A - C = 0 \ \Rightarrow$$
$$B = D = \frac{\kappa}{2}, A = C = 0 \ \Rightarrow$$

Als allgemeine Lösungen erhält man

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\kappa}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ y_2 &= \frac{\kappa}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \end{aligned}$$

Oder anders dargestellt (mittels Additionstheoremen)

$$\begin{aligned} y_1 &= k\big(\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\big) \\ y_2 &= k\big(\sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\big) \end{aligned}$$

Also sieht man: Eine Schwingung mit der Kreisfrequenz $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ wird mit einer Schwingung der Kreisfrequenz $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ moduliert.

1.5.1 Kochrezept zum Lösen von Dgl-Systemen

Gegeben ist das inhomogene lineare System von Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{S}(t) \tag{1.108}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine $n \times n$-Matrix ist. Zuerst bestimmt man ein so genanntes Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(t) = \Big(\vec{Y}_1(t) \dots \vec{Y}_n(t)\Big)$ des zugeordnetem homogenen lin. Dgl-System

$$\vec{y}' = A\vec{y} \tag{1.109}$$

Hierzu berechnet man die Eigenwerte der Matrix A. Wir gehen davon aus, dass $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die reellen und $\mu_1, \ldots, \mu_m$ die komplexen Eigenwerte sind (dann ist $m = 2l$ gerade). Also gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_l$ komplexe Eigenwerte, die nicht zu einander paarweise konjugiert komplex sein können. Jeder Eigenwert hat eine Vielfachheit $q_1, \ldots, q_k$ für die reellen und $r_1, \ldots, r_l$ für die komplexen.
Wir bestimmen exemplarisch für λ_1, q_1 bzw. μ_1, r_1 die Basis-Lösungen (muss dann für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq l$ gemacht werden).
Man bestimmt nun für (und die existieren) q_1 linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{q_1}$ mit der Eigenschaft

$$(A - \lambda_1 E)^{q_1} \vec{v}_s = 0, \ 1 \leq s \leq q_1$$

Dann bilden für $1 \leq s \leq q_1$

$$\vec{Y}_s = e^{\lambda_1 t}\Big(\vec{v}_s + t[A-\lambda_1 E]\vec{v}_s + \frac{1}{2}t^2[A-\lambda_1 E]^2\vec{v}_s + \ldots + t^{q_1-1}\frac{1}{(q_1-1)!}[A-\lambda_1 E]^{q_1-1}\vec{v}_s\Big) \quad (1.110)$$

q_1 linear unabhängige Lösungsvektoren von $\mathbf{Y}(t)$. Nun verfährt man mit den anderen reellen Vektoren genauso. Bei den komplexen Eigenwerten $\mu_1, \ldots, \mu_l$ wird wie in (1.110) vorgegangen. Man erhält komplexwertige Funktionen $\hat{\vec{Y}}_s$ für $1 \leq s \leq l$. Dann bildet man $Re(\hat{\vec{Y}}_s)$ und $Im(\hat{\vec{Y}}_s)$ und erhält zwei reelle Lösungsvektoren von $\mathbf{Y}(t)$. Damit ist das Fundamentalsystem komplett.
Nun zum inhomogenen System:
Der Ansatz ist: Finde Funktionen $c_1'(t), \ldots, c_n'(t)$ mit

$$c_1'(t)\vec{Y}_1 + \ldots + c_n'(t)\vec{Y}_n = \vec{S}(t) \quad (1.111)$$

Man sucht also (und geht auch so vor) einen Lösungsvektor

$$\vec{c}'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}$$

mit der Eigenschaft

$$\mathbf{Y}(t)\vec{c}'(t) = \vec{S}(t) \quad (1.112)$$

Dazu kann man z.B. das Gauß-Verfahren verwenden. Hat man $\vec{c}'(t)$ berechnet, so bestimme man für jede Komponente eine Stammfunktion und erhält den Vektor $\vec{c}(t)$. Eine partikuläre Lösung von (1.108) bekommt man durch den Ansatz

$$\vec{Y}_{par}(t) = c_1(t)\vec{Y}_1(t) + \ldots + c_n(t)\vec{Y}_n(t)$$

und die allgemeine Lösung von (1.108) lautet dann

$$\vec{Y}_{all}(t) = a_1\vec{Y}_1(t) + \ldots + a_n\vec{Y}_n(t) + \vec{Y}_{par}(t)$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

1.5.2 Übung

1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Man bestimme die allgemeine Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$ (Hinweis: Es ist $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$ mit $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ und $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$)

2. Man bestimme die Lösung des AWPs
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; y(0) = (0,1)^T$$

3. Man bestimme die allgemeine Lösung und das asymptotische Verhalten für $t \to \pm\infty$ des linearen Differenzialgleichungssytems $\dot{\vec{x}} = \mathcal{A}\vec{x}$
   (a) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$;
   (b) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$;
   (c) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;
   (d) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;
   (e) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$;
   (f) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$;
   (g) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

4. Man bestimme die allgemeine Lösung und das asymptotische Verhalten für $t \to \pm\infty$ des linearen Differenzialgleichungssytems $\dot{\vec{x}} = \mathcal{A}\vec{x}$
   (a) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
   (b) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

5. Man betrachte das inhomogene linerae Differenzialgleichungssystem

$$\vec{y}' = \mathcal{A}\vec{y} + \vec{c}(t)$$

   Man gebe die allgemeine Lösung für die folgenden Matrizen $\mathcal{A}$ bzw. Vektoren $\vec{c}(t)$ an:

   (a) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$;

   (b) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

   (c) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

   (d) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; und $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$;

6. Man wandele die folgenden Differenzialgleichungen höherer Ordnung in ein System erster Ordnung um und löse es.

   (a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = te^{-t}$

   (b) $y''' + 5y'' - 6y' = 3e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{3}{7},\ y''(0) = \frac{6}{7}$

   (c) $y^{(5)} - 4y^{(4)} + 4y^{(3)} = 240t^2 + 4e^{2t}$

7. Man löse die folgenden Differenzialgleichungen

   (a)
$$x^2y'' - 2xy' + y = 8 + x,\ x > 0$$

   (b)
$$\begin{aligned} y' - 4y - z' &= 32 \\ y''' - y' + z' + 4z &= 0 \end{aligned}$$

   (c)
$$y''' + 3y'' + 3y' + y = \frac{1}{x}e^{-x},\ x > 0$$

8. Ein Massepunkt in der (x, y)-Ebene bewege sich gemäš des Differenziationsgleichungssystem

$$\dot{x} = 1 - x^2 - 3y^2,\ \dot{y} = 2xy$$

   Man bestimme

(a) die stationären Punkte;
(b) alle Bahnen (Lösungen) der Bewegung;
(c) den durch die Zeit t bestimmten Durchlaufsinn der Kurven;
(d) die Lösung $(x(t), y(t))$ mit den Anfangswerten $x(0) = x_0 = 0; y(0) = y_0 = 1$;
(e) $\lim_{t\to\infty} x(t)$ und $\lim_{t\to\infty} y(t)$ der Lösung aus d);

Liegt ein Widerspruch zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz vor?

9. Ein Massenpunkt in der (x, y)-Ebene bewege sich gemäß des Differenzialgleichungssystem

$$\dot{x} = \cosh 1 - \cosh x - y,\ \dot{y} = y \sinh x$$

Man bestimme

(a) die stationären Punkte;
(b) alle Bahnen (Lösungen) der Bewegung;
(c) den durch die Zeit t bestimmten Durchlaufsinn der Kurven;
(d) die Lösung $(x(t), y(t))$ mit den Anfangswerten $x(0) = x_0 = 0; y(0) = y_0 = 2\cosh 1 - 2$;
(e) $\lim_{t\to\infty} x(t)$ und $\lim_{t\to\infty} y(t)$ der Lösung aus d);

10. Gegeben sei das das autonome Dgl-System

$$\dot{x} = 1 + y - x^2,\ \dot{y} = xy$$

(a) Die Bahnen-Differenzialgleichung besitzt einen integrierenden Faktor $M(y)$. man bestimme diesen Faktor und damit die Bahnen der Lösungen des Dgl-System.
(b) man bestimme die Lösung $\Big(x(t), y(t)\Big)$ des Dgl-Systems zu $x(0) = 0,\ y(0) = 0$.