Kurvendiskussion 02 Lösungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f: x \mapsto \frac{6x^2+x-1}{6x^2-27x+12}$, mit dem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und dem Graphen G_f.

a) Bestimmen sie den maximalen Definitionsbereich zu f und das Verhalten von f an den Grenzen von $\mathbb{D}$.

$$6x^2 - 27x + 12 = 6 \cdot (x-4) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{4; \frac{1}{2}\right\}$$

b) Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen von f und den y-Achsenschnittpunkt.

$$6x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{12} = \begin{cases} \frac{1}{3} \notin \left\{4; \frac{1}{2}\right\} \\ -\frac{1}{2} \notin \left\{4; \frac{1}{2}\right\} \end{cases}$$

Die Nullstellen: $N_1\left(\frac{1}{3}; 0\right), N_2\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

c) Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten von f.

Senkrechte Asymptoten: $x_1 = 4; x_2 = \frac{1}{2}$

Horizontale Asymptoten:

$$(6x^2 + x - 1) : (6x^2 - 27x + 12) \quad = \quad 1 + \frac{28x - 13}{6x^2 - 27x + 12}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{28x - 13}{6x^2 - 27x + 12}\right) = 1 \Rightarrow y = 1$$

Schiefe Asymptoten: - - -

d) Berechnen Sie die Koordinaten aller lokalen Extrema von f und bestimmen Sie die Art aller auftretenden Extrema.

[Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{-56x^2+52x-5}{3\cdot(2x^2-9x+4)^2}$]

Lage:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{(6x^2 + x - 1)}{6x^2 - 27x + 12}\right)' \\ &= \frac{(6x^2 - 27x + 12) \cdot (12x + 1) - (6x^2 + x - 1) \cdot (12x - 27)}{9 \cdot (2x^2 - 9x + 12)^2} \\ &= \frac{-56x^2 + 52x - 5}{3 \cdot (2x^2 - 9x + 4)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ -56x^2+52x-5=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-52\pm\sqrt{52^2-4\cdot 5\cdot 56}}{-112}=\begin{cases}\dfrac{13+3\sqrt{11}}{28}\approx 0{,}8196\notin\left\{4;\dfrac{1}{2}\right\}\\ \dfrac{13-3\sqrt{11}}{28}\approx 0{,}1089\notin\left\{4;\dfrac{1}{2}\right\}\end{cases}$$

$$f\left(\frac{13+3\sqrt{11}}{28}\right)\approx -0{,}6313;\ f\left(\frac{13-3\sqrt{11}}{28}\right)\approx -0{,}0898$$

Die möglichen Extrema: $E_1(0{,}8196;\ -0{,}6313), E_2(0{,}1089;\ -0{,}0898)$

Art:

x	$x <$	$0{,}1089$	$< x <$	$0{,}5$	$< x <$	$0{,}8196$	$< x <$	4	$< x$
$sgn\left(f'(x)\right)$	-1	0	$+1$	↯	$+1$	0	-1	↯	-1
G_T	\	_	/	|	/	_	\	|	\
	$s.m.f.$	MIN	$s.m.w.$	POL	$s.m.w.$	MAX	$s.m.f.$	POL	$s.m.f.$

$E_1(0{,}8196;\ -0{,}6313)$: Maximum

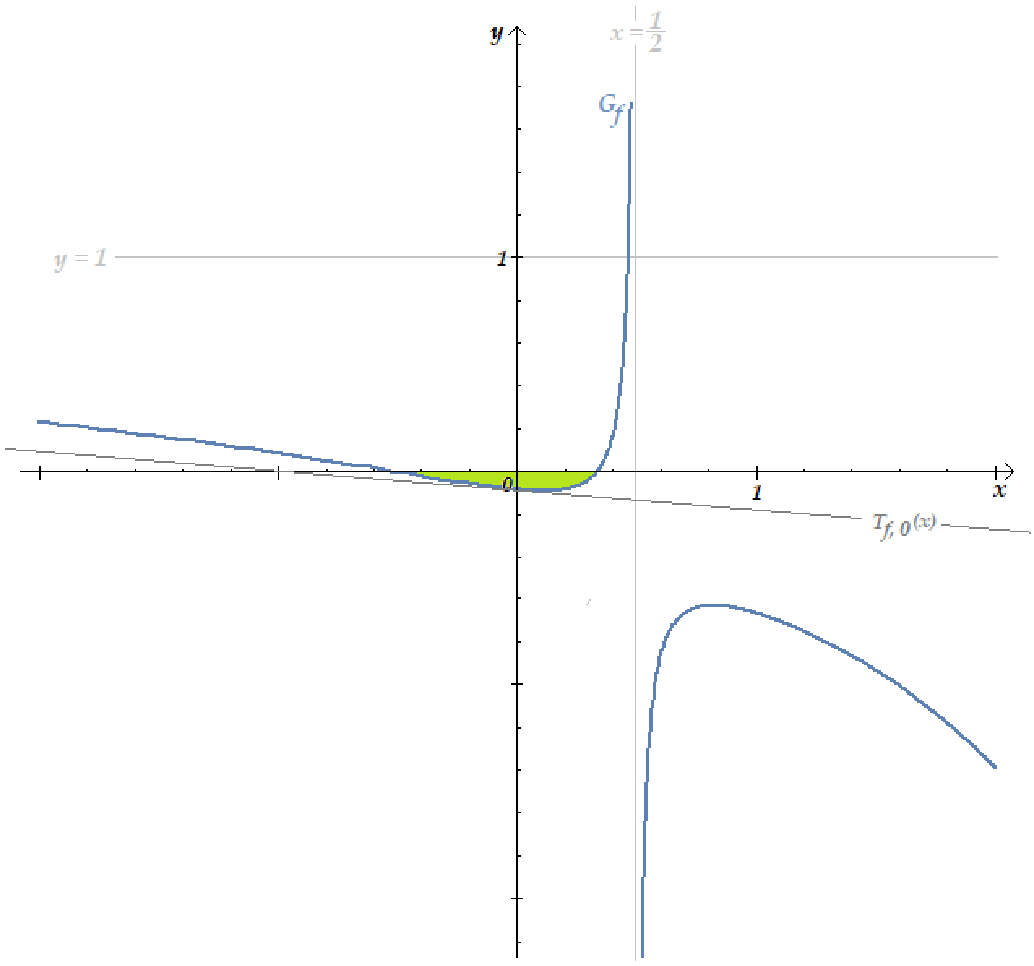
$E_2(0{,}1089;\ -0{,}0898)$: Minimum

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente Tan G_f im Punkt $(0/-\frac{1}{12})$.

$$f(0)=-\frac{1}{12};f'(0)=-\frac{5}{48}$$

$$\Rightarrow T_{f;0}(x)=-\frac{1}{12}-\frac{5}{48}x$$

f) Zeichnen Sie den Graphen G_f, sämtliche Asymptoten und die Tangente T in ein kartesisches Koordinatensystem, im Bereich $-2 \leq \mathrm{x} \leq 2$, $2cm \equiv 1\mathrm{LE}$, für x- und y-Achse.



g) Die x-Achse, die zwei Nullstellen und G_f schließen ein Flächenstück ein.

a. Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung

(s.o.)

b. Weisen Sie nach, dass die Folgende Funktion eine Stammfunktion von f ist

$$F(\mathrm{x}) = \frac{1}{3} \cdot \left(3\mathrm{x} + \frac{99}{7} \cdot \ln|x-4| - \frac{1}{7} \cdot \ln|2x-1|\right)$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \left(3 + \frac{99}{7} \cdot \frac{1}{x-4} - \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{2x-1}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot (x-4) \cdot 7 \cdot (2x-1) + 99(2x-1) - 2(x-4)}{7(x-4)(2x-1)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{21 \cdot (2x^2 - 9x + 4) + 198x - 99 - 2x + 8}{7(x-4)(2x-1)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{42x^2 - 189x + 84 + 196x - 91}{7(x-4)(2x-1)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{42x^2 + 7x - 7}{7(x-4)(2x-1)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{6x^2 + x - 1}{2x^2 - 9x + 4} \\
&= \frac{6x^2 + x - 1}{6x^2 - 27x + 12} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

c. Berechnen Sie den Flächeninhalt des markierten Flächenstücks.

$$A = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} f(x)dx \right| = \left| [F(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \right| \approx 0{,}0468$$