Übungsaufgaben Nr 2
zur Mathematik, SoSe 2010

Aufgabe 1

$$B = \sqrt[8]{\left(\sqrt{(a+1)^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a}} - (1-a)^2 + \frac{1}{\sqrt{a}}\left(-\sqrt{a^3}\right)\right)^2}$$

$$= \left(\left((a+1)^{\frac{5}{2}} \cdot (a+1)^{-\frac{1}{2}} - (1-a)^2 + a^{-\frac{1}{2}}\left(-a^{\frac{3}{2}}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{8}}$$

$$= \left((a+1)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} - (1-a)^2 - a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left((a+1)^2 - (1-a)^2 - a\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(a^2 + 2a + 1 - 1 + 2a - a^2 - a\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= (3a)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt[4]{3a}}}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \frac{1+2x}{\sqrt{x+1+x}} + 5$$

$$y = \frac{1+2x}{\sqrt{1+2x}} + 5 \qquad \Big|\ x \leftrightarrow y$$

$$x = \frac{1+2y}{\sqrt{1+2y}} + 5$$

$$x = (1+2y)^{1}(1+2y)^{-\frac{1}{2}} + 5$$

$$x = (1+2y)^{\frac{1}{2}} + 5 \qquad \Big|\ -5$$

$$x-5 = (1+2y)^{\frac{1}{2}} \qquad \Big|\ (\ .\ )^2$$

$$(x-5)^2 = 1+2y \qquad \Big|\ -1\ \Big|\ :2$$

$$\frac{(x-5)^2-1}{2} = y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 12$$

$\Rightarrow \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 12$

$= \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 24)$

$= \frac{1}{2}((x-5)^2 - 1)$

$= \frac{1}{2}(x-5)^2 - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_{f^{-1}}(5 / -\frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ Die Parabel ist nach oben geöffnet

$\Rightarrow \mathbb{W}_{f^{-1}} = [-\frac{1}{2} ; \infty[$

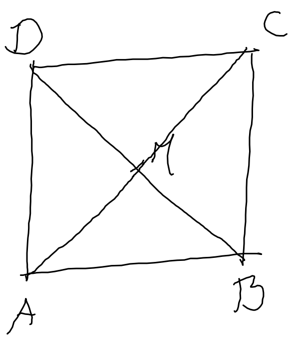
Aufgabe 3

1. $A(5/3/1)$; $C(1/3/5)$

x_2 bleibt konstant

$\Rightarrow B(1/3/1)$; $D(5/3/5)$

2.



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-5 \\ 3-3 \\ 5-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

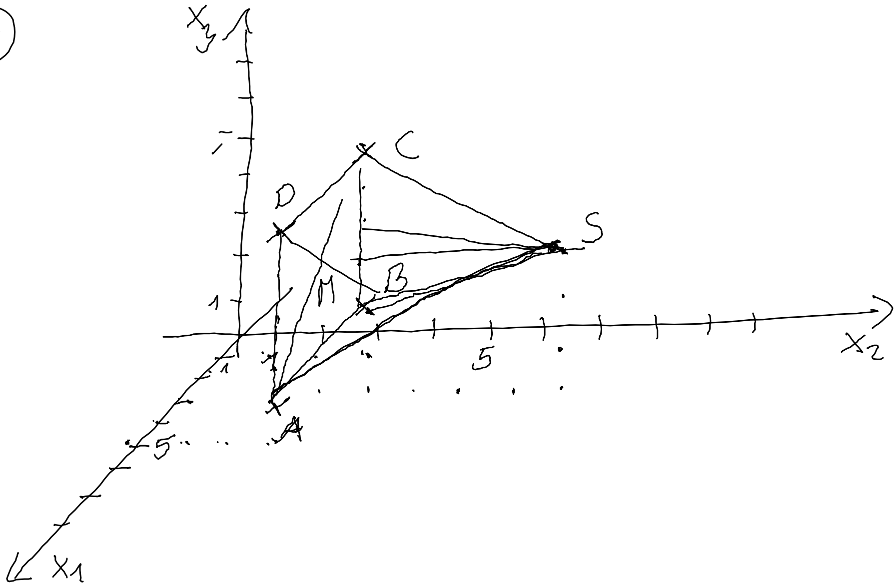
$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M(3/3/3)$

$\Rightarrow \underline{\underline{S(3/8/3)}}$

Skizze

③



④ $\vec{AS} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 8-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 3-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Der gesuchte Winkel ist derjenige zwischen $\vec{AS}$ und $\vec{AC}$

$$\vec{AS} \cdot \vec{AC} = |\vec{AS}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{AS} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AS}| \cdot |\vec{AC}|}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{(-2)\cdot(-4) + 5\cdot 0 + 2\cdot 4}{\sqrt{4+25+4}\ \sqrt{16+0+16}}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{33}\cdot 4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha \approx 60{,}5^\circ}}$$

5. Die Höhe der Seite Δ_{CDS} besitzt zum Vektor zwischen den Mittelpunkten der Strecken $\overline{DC}$ ~~xxxxx~~ und $\overline{AB}$ den gesuchten Winkel.

a) Die Höhe der Seite Δ_{CDS}

$$\overrightarrow{OM_{CD}} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-5 \\ 3-3 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3+0 \\ 5+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M_{CD}(3/3/5)$

$\Rightarrow$ Der Höhenvektor ist $\overrightarrow{M_{CD}S}$

$$\overrightarrow{M_{CD}S} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 8-3 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Der Verbindungsvektor der Kantenmittelpunkte

$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-5 \\ 3-3 \\ 1-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3+0 \\ 1+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M_{AB}(3/3/1)$

c) Berechnung des Winkels

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_{CD}M_{AB}} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-3 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_{CD}M_{AB}} \cdot \overrightarrow{M_{CD}S} = \left|\overrightarrow{M_{CD}M_{AB}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_{CD}S}\right| \cdot \cos(\beta)$$

$$\Rightarrow \cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{M_{CD}M_{AB}} \cdot \overrightarrow{M_{CD}S}}{\left|\overrightarrow{M_{CD}M_{AB}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_{CD}S}\right|}$$

$$\Rightarrow \cos(\beta) = \frac{0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4)}{\sqrt{0+25+4}\,\sqrt{0+0+16}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{29} \cdot 4} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

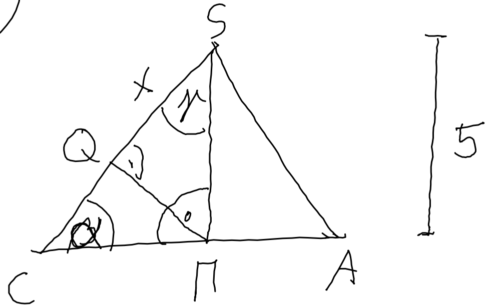
$$\Rightarrow \beta = 68{,}2^\circ$$

d) Umrechnung in das Bogenmaß

$$\frac{\beta_B}{2\pi} = \frac{68{,}2^\circ}{360{,}0^\circ} \quad \Big| \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \beta_B = \frac{68{,}2^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \underline{\underline{1{,}19}}$$

⑥



$\alpha = 60{,}5°$

$\Rightarrow \gamma = 29{,}5°$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\overline{\Pi S}} = \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad x = \overline{\Pi S} \cdot \cos(\alpha)$$

$$= 5 \cdot \frac{4}{\sqrt{66}}$$

$$\Rightarrow x \approx 2{,}46$$

Aufgabe 4

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 \vec{w} + \lambda_2 \cdot \vec{x} + \lambda_3 \cdot \vec{y} + \lambda_4 \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -11 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -11 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -11 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot(-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -11 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$$

sind l.a. und damit keine Basis.