Kurvendiskussion 01 (Lsgn.)

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2}{x^2-4}$, mit dem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und dem Graphen G_f.

a) Bestimmen sie den maximalen Definitionsbereich zu f und das Verhalten von f an den Grenzen von $\mathbb{D}$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$; $\lim\limits_{x \to (-2)^\pm} \frac{x^2}{x^2-4} = \mp\infty$; $\lim\limits_{x \to (2)^\pm} \frac{x^2}{x^2-4} = \pm\infty$

b) Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen von f und den Y-Achsenschnittpunkt.

NST: $N(0; 0)$ ist auch der Y-Achsenschittpunkt

c) Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten von f.

Senkrechte Asymptoten: $x = 2$; $x = -2$

Horizontale Asymptoten: $y = 1$

Schiefe Asymptoten: -----

d) Berechnen Sie die Koordinaten aller lokalen Extrema von f und bestimmen Sie die Art aller auftretenden Extrema.

$f'(x) = -\frac{8x}{(x^2-4)^2}$; $f''(x) = (-8) \cdot \frac{-4-3x^2}{(x^2-4)^3}$

$\Rightarrow$ $E_1(0; 0)$ (Ein lokales Maximum)

[Zwischenergebnis: $f'(x) = -\frac{8x}{(x^2-4)^2}$]

e) Weisen Sie nach, dass die Funktion keinen Wendepunkt besitzt und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente T an G_f im Punkt $(3/1{,}8)$.

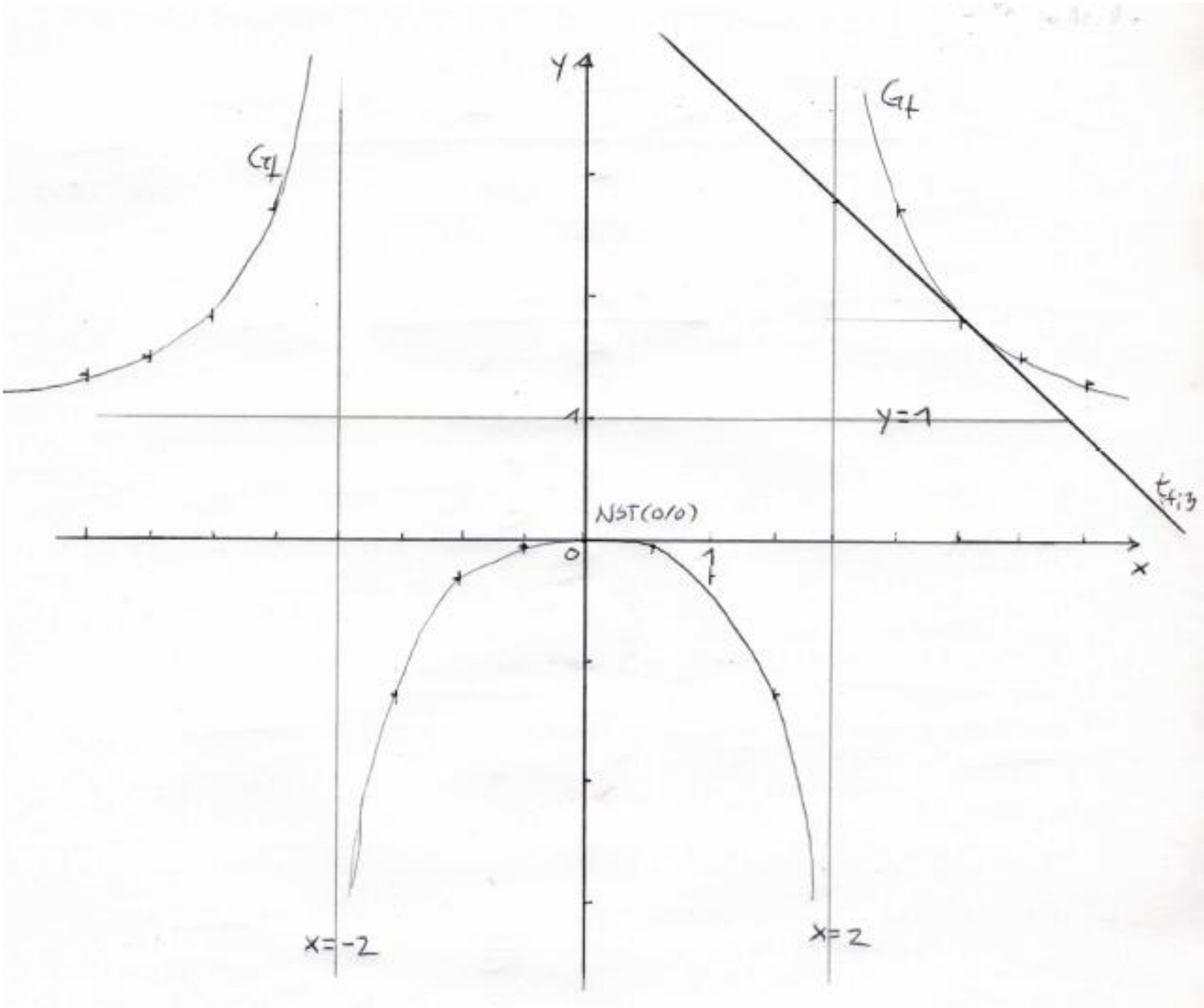
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} \notin \mathbb{R}$$

Gleichung der Tangente:

$$T = t_{f;3}(x) = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3) = -0{,}96x + 4{,}68$$

f) Zeichnen Sie den Graphen G_f, sämtliche Asymptoten und die Tangente T in ein kartesisches Koordinatensystem, im Bereich $-4 \leq x \leq 4$, $2cm \equiv 1LE$, für x- und y-Achse.

$$T =: t_{f;3}$$



g) Ermitteln Sie die allgemeine Stammfunktion zu der Funktion $g: x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ und berechnen Sie den Wert des Integrals über g auf dem Intervall $[-1;1]$.

$$g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2 - 4}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2 - 4| + c$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2 - 4}\, dx = 0$$

Aufgabe 2:

Die Funktion $f\colon \mathrm{x} \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{1-e^{x}}$ sei in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}$. Der Graph der Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_f .

a) Bestimmen Sie $\mathbb{D}$ und das Verhalten von f an den Rändern von $\mathbb{D}$.

$\mathbb{D}= \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{1-e^x} = -1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1-e^x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \frac{e^x}{1-e^x} = \mp\infty$

b) Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

Senkrechte Asymptoten: $x = 0$

Horizontale Asymptoten: $y = 0$; $y = 1$

Schiefe Asymptoten: ----

c) Berechnen Sie das Integral $\lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a f(x)\, dx$.

$$\lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{e^x}{1-e^x}\, dx = \lim_{a\to\infty} [-\ln|1-e^x|]_1^a = -\infty$$