Übungsaufgaben zur Mathematik, SoSe 2010

Aufgabe 1
Vereinfachen Sie den folgenden Wurzelterm so weit wie möglich:

$$\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{n}-\sqrt{n^5})^3\cdot(1-\sqrt[4]{a})\cdot\sqrt{1-\sqrt[4]{a}}}}{\left(\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[3]{1-n^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{1-\sqrt[4]{a}}}\right)^3}$$

Aufgabe 2
Gegeben sei die quadratische Funktion:

$$f(x) = 3x^2 - 3x - 18.$$

Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. Geben Sie den Defintionsbereich für f an.
2. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.
3. Argumentieren Sie, ob f einen kleinsten oder einen größten Funktionswert besitzt und ermitteln Sie anschließend die Koordinaten dieses Punktes.
4. Verbindet man die Nullstellen von G_f über gerade Strecken mit dem Scheitelpunkt von G_f, so schließen diese Strecken zusammen mit der x-Achse ein Dreieck ein.
   (a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks
   (b) Bestimmen Sie den Umfang dieses Dreiecks
   (c) Um was für ein Dreieck handelt es sich?
   (d) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g, die durch den Scheitel und diejenige Nullstelle verläuft, welche weiter rechts auf der x-Achse liegt.
5. Bestimmen Sie den Anteil des Definitionsbereiches von f, auf den man f beschränken muss, so dass man die Umkehrfunktion von f bestimmen kann.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion zu der folgenden Funktion:

$$f_1(x) = \frac{1+x}{2-x} + 5$$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Lösungsmenge auf $[0\,;\,2\pi]$ zu folgender goniometrischer Gleichung

$$\sin(\alpha)\tan(\alpha) + \cos(\alpha) = \tan(\alpha)\cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{6})$$

Aufgabe 5
Im dreidimensionalen Raum ($\mathbb{R}^3$) bilden die folgenden Punkte drei Eckpunkte eines Quaders: $A(1/2/3)$, $B(1/5/3)$, $G(-3/5/7)$

1. Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte (C, D, E, F, H) des Quaders
2. Bestimmen Sie die Vektoren aller Raumdiagonalen des Quaders.
3. Bestimmen Sie die Längen der Raumdiagonalen.
4. Welche Koordinaten besitzt der Schnittpunkt der Raumdiagonalen?
5. Überprüfen Sie ob der Vektor, welcher vom Eckpunkt A zum Kreuzungspunkt der Seitendiagonalen der Seite $BCFG$ weist, kollinear zur Raumdiagonalen von $\overline{AG}$ ist.

Aufgabe 6
Überprüfen Sie, welche der folgenden Vektorgruppen eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen

1. $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2.
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Für welche Werte des Parameters a schließen die folgenden zwei Vektoren einen Winkel von $60°$ ein?

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$$