# Übungsaufgaben zur Mathematik SoSe 2010

## Aufgabe 1

$$A = \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n^5}\right)^3\left(1-\sqrt[4]{a}\right)\sqrt{1-\sqrt[4]{a}}}}{\left(\sqrt[6]{a}\;\sqrt[3]{1-n^2}\;\sqrt[3]{\sqrt{1-\sqrt[4]{a}}}\right)^3}$$

$$= \frac{\left(\left(n^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{5}{2}}\right)^3\left(1-\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{6}}\left(1-n^2\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(1-\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3}$$

$$= \frac{\left(n^{\frac{1}{2}}\left(1-n^2\right)\right)\left(\left(1-\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-n^2\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{n^{\frac{1}{2}}\left(1-n^2\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}\left(1-n^2\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{\frac{n}{a}}}}$$

## Aufgabe 2

1. $D_f = \mathbb{R}$

2. Schnittpunkt mit der y-Achse

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow f(0) = 18 \Rightarrow S_y(0/18)$

Schnittpunkte mit der x-Achse
(Nullstellen)

$\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = 3x^2 - 3x - 18 \quad | :3$

$0 = x^2 - x - 6$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2}$$

$$= \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow S_{x_1}(3/0) \qquad S_{x_2}(-2/0)$

3.

Der Koeffizient vor dem $x^2$-Term ist positiv. Damit ist die Parabel nach oben geöffnet und besitzt einen tiefsten Punkt als Scheitel und damit einen kleinsten Funktionswert.

$$y = 3x^2 - 3x + 18$$

$$= 3\left(x^2 - x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 6\right)$$

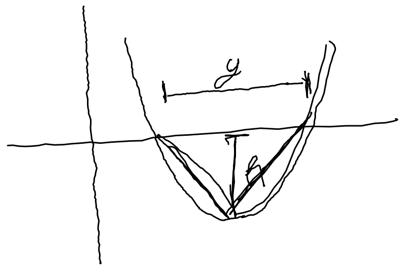
$$= 3\left(\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{25}{4}\right)$$

$$= 3\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{75}{4}$$

$$\Rightarrow S\left(\tfrac{1}{2} \middle/ -\tfrac{75}{4}\right)$$

4.

a)



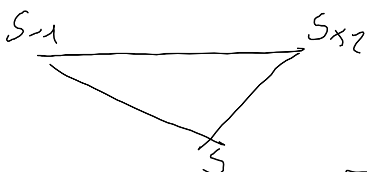

$g = 3 - (-2) = 5$

$h = \left| -\frac{75}{4} \right| = \frac{75}{4}$

$\Rightarrow A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{75}{4} = \underline{\underline{\frac{375}{8}}}$

b) $S_{x_1}(3/0)$ $\quad S_{x_2}(-2/0)$

$S\left(\frac{1}{2} / -\frac{75}{4}\right)$




$d(S_{x_1}/S) = \sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(0-\left(-\frac{75}{4}\right)\right)^2}$

$= \frac{5\sqrt{229}}{4} \approx 18{,}92$

$d(S_{x_2}/S) = \sqrt{\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(0-\left(-\frac{75}{4}\right)\right)^2}$

$= \frac{5\sqrt{229}}{4} \approx 18{,}92$

$d(S_{x_1}/S_{x_2}) = \sqrt{(3-(-2))^2 + 0}$

$= 5$

$\Rightarrow U_{\Delta} = 2 \cdot 18{,}92 + 5 \approx \underline{\underline{42{,}84}}$

c) Es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck.

d) $S(\frac{1}{2} / -\frac{75}{4})$ $S_{x_1}(3/0)$

$$m = \frac{-\frac{75}{4} - 0}{\frac{1}{2} - 3} = \frac{15}{2}$$

$\Rightarrow y = \frac{15}{2}x + t$

$\Rightarrow S_{x_1}$ einsetzen $\Rightarrow 0 = \frac{15}{2} \cdot 3 + t$

$\Rightarrow t = -\frac{45}{2}$

$\Rightarrow g: \underline{\underline{y = \frac{15}{2}x - \frac{45}{2}}}$

5. Um einen Definitionsbereich für f zu erhalten, auf dem eine Umkehrung möglich ist, darf dieser nur eine Hälfte der Parabel enthalten oder einen Abschnitt, der den Scheitel nicht mit einschließt.

z.B. $\mathbb{D}_{f_1} = [\frac{1}{2}; \infty[$ 

$\mathbb{D}_{f_2} = ]-\infty; \frac{1}{2}]$ 

Der x-Wert des Scheitels als Randpunkt des Intervalls ist zugelassen.

## Aufgabe 3

$$f_1(x) = \frac{1+x}{2-x} + 5$$

$$y = \frac{1+x}{2-x} + 5 \qquad \Big| \; x \leftrightarrow y$$

$$x = \frac{1+y}{2-y} + 5 \qquad \Big| -5$$

$$x-5 = \frac{1+y}{2-y} \qquad \Big| \cdot (2-y)$$

$$(x-5)(2-y) = 1+y$$

$$2x-10-xy+5y = 1+y \qquad \Big| +xy-5y-1$$

$$2x-10-1 = y+xy-5y$$

$$2x-11 = y(x-4) \qquad \Big| :(x-4)$$

$$\frac{2x-11}{x-4} = y$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f_1^{-1}(x) = \frac{2x-11}{x-4}}}$$

## Aufgabe 4

$$\sin(\alpha)\tan(\alpha)+\cos(\alpha)=\tan(\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\cos(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

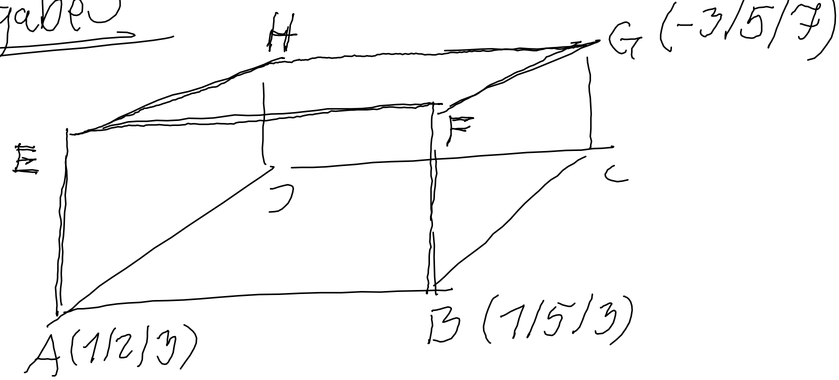
$$\Rightarrow \quad \sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=\sin(\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad 1=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}+\alpha \quad \Big| -\frac{\pi}{6}$$

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{3}=\alpha}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{\alpha=60^\circ}}$$

# Aufgabe 5




① C (-3/5/3)    F (1/5/7)

D (-3/2/3)    H (-3/2/7)

E (1/2/7)

② $\vec{d_1} = \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 5-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{d_2} = \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 2-5 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{d_3} = \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 2-5 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

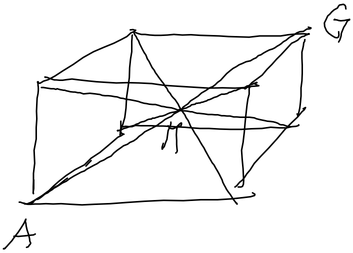
$\vec{d_4} = \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 5-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

③ $|\vec{d_1}| = |\vec{d_2}| = |\vec{d_3}| = |\vec{d_4}|$

$$|\vec{d_1}| = \sqrt{\vec{d_1} \cdot \vec{d_1}} = \sqrt{16 + 9 + 16}$$

$$= \sqrt{41} = \underline{\underline{6,4}}$$

④




Um die Koordinaten von M zu erhalten, muss man $\vec{OM}$ bestimmen.

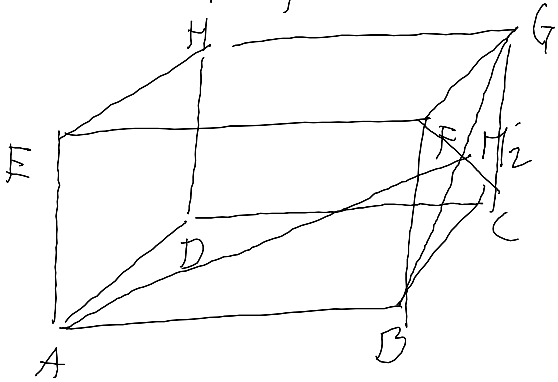
$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \cdot \vec{AG}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3,5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M(-1/3,5/5)}}$$

(5)

$$\vec{AG} = \begin{pmatrix}-4\\3\\4\end{pmatrix}$$




$$\vec{AM_2} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BG}$$

$$= \begin{pmatrix}1-1\\5-2\\3-3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3-1\\5-5\\7-3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}}}$$

$\Rightarrow$ gilt $\begin{pmatrix}-4\\3\\4\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$ ?

$-4 = \lambda \cdot (-2) \Rightarrow \lambda = 2$

$\Rightarrow \quad 3 = \lambda \cdot 3 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \qquad$ ↯ $\Rightarrow$ nicht kollinear!

$4 = \lambda \cdot 2 \quad \Rightarrow \lambda = 2$

# Aufgabe 6

1) $\lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \cdot(-2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Linear abh.}$$

$\Rightarrow$ Keine Basis

Bem.: Bei drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ braucht man nur deren l.U. zu überprüfen, um zu erkennen, ob man sie als Basis verwenden kann.

②

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \cdot(-2) \; +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \cdot(-3) \; +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0 \quad \text{l.u.}$$

Die Vektoren stellen eine Basis im $\mathbb{R}^3$ dar.

## Aufgabe 7

$$\cos(60°) = \frac{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{50}\,\sqrt{5+a^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{3+4a+10}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{5+a^2}} \quad \Big|\cdot\sqrt{50(5+a^2)}\cdot$$

$$\Rightarrow \sqrt{50(5+a^2)} = 6+8a+20 \quad \Big|\,(\ )^2 \quad (*)$$

$$50\cdot(5+a^2) = (26+8a)^2$$

$$250+50a^2 = 676+416a+64a^2 \quad \Big|-250-50a^2$$

$$0 = 14a^2+416a+426$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{-416 \pm \sqrt{(416)^2-4\cdot 14\cdot 426}}{28}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_1 = -1{,}062}} \qquad \underline{\underline{a_2 = -28{,}65}}$$

zur Probe in (*) eingesetzt $\Rightarrow$ $a_1$ ist die einzige Lsg.